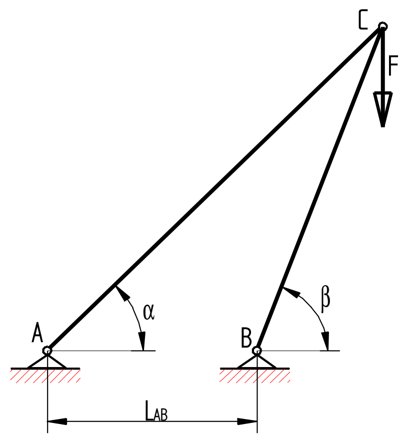
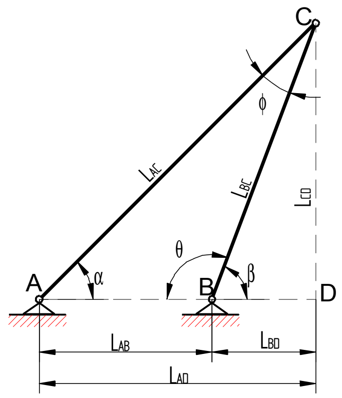
TRACCIA



Risolvere la struttura disegnata a lato, calcolando le reazioni vincolari e disegnando i diagrammi delle sollecitazioni.
Ipotizzando gli elementi in acciaio e a sezione circolare, calcolare i diametri, verificando la resistenza a carico di punta e a fatica.
Calcolare lo spostamento del punto C

Dati:
α = 45° β= 60
L_{AB} = 1200 mm F = 10 kN

Calcolo della varie distanze e lunghezze



Dalla analisi della figura si ricava:

$$\theta = 180 - \beta = 180 - 60 = 120° \quad \text{e} \quad \phi = 180 - \alpha - \theta = 180 - 45 - 120 = 15°$$

Applicando il teorema dei seni al triangolo ABC si ha

$$\frac{L_{AC}}{sen\,\theta} = \frac{L_{AB}}{sen\,\phi} \quad \text{e} \quad \frac{L_{BC}}{sen\,\alpha} = \frac{L_{AB}}{sen\,\phi}$$

da cui

$$L_{AC} = \frac{L_{AB}}{sen\,\phi} \cdot sen\,\theta = \frac{1200}{sen(15)} sen(120) = 4015{,}3\ mm$$
$$L_{BC} = \frac{L_{AB}}{sen\,\phi} \cdot sen\,\theta = \frac{1200}{sen(45)} sen(120) = 3278{,}5\ mm$$

Dai triangoli rettangoli ABD e BCD si ha

$$L_{CD} = L_{AC} \cdot sen(\alpha) = 4015{,}3 \cdot sen(45) = 2839{,}3\ mm \quad \text{e} \quad L_{AD} = L_{CD} = 2839{,}3\ mm$$
$$L_{BD} = L_{BC} \cdot \cos(\beta) = 3278{,}5 \cdot \cos(60) = 1639{,}25\ mm$$

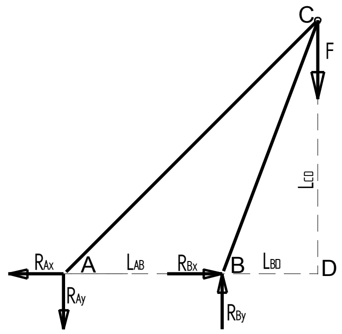
Analisi isostaticità struttura

La struttura è formata da due aste avente ognuna 3 gradi di libertà, per cui la struttura ha un totale di 6 g.d.l.
Le cerniere esterne hanno grado di vincolo 2n, dove n è il numero di aste collegate al vincolo, per cui, essendo 2 le cerniere esterne, impongono alla struttura 4 gradi di vincolo.
La cerniera interna ha 2(n-1) gradi di vincolo dove n è il numero di aste, in questo caso le aste sono 2 per cui i gradi di vincolo saranno 2(2-1)=2
I gradi di vincolo presenti sono quindi 6 come i gradi di libertà.

L'uguaglianza dei due gradi, di vincolo e di libertà, è condizione necessaria ma non sufficiente per garantire l'isostaticità della struttura; è necessario effettuare anche una analisi cinematica per verificare se ci sono o meno labilità; nel caso in esame è facile verificare che per le aste non ci sono possibilità di movimento, per cui la struttura è isostatica

Calcolo delle reazioni vincolari

Si disegna il corpo libero associato, sostituendo ai vincoli le reazioni vincolari.



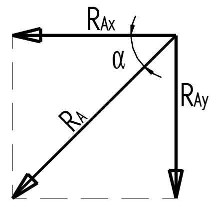
Si applicano le equazioni cardinali della statica

$$\Sigma\ F_x = 0 \qquad R_{Ax} - R_{Bx} = 0$$
$$\Sigma\ F_y = 0 \qquad R_{Ay} - R_{By} + F = 0$$
$$\Sigma\ M_z = 0 \qquad R_{By} \cdot L_{AB} - F \cdot L_{AD} = 0$$
(rispetto al punto A)

Risolvendo il sistema si ottiene

$$R_{By} = \frac{F \cdot L_{AD}}{L_{AB}} = \frac{10\,000 \cdot 2839{,}3}{1200} = 23660{,}8\ N$$
$$R_{Ay} = R_{By} - F = 23660{,}8 - 10000 = 13660{,}8\ N$$

Per calcolare R_A si deve tener presente che la sua direzione coincide quella dell'asta AC , inclinata di 45 gradi rispetto all'orizzontale.



Dal grafico a lato è facile ricavare che $R_{AX} = R_{AY} = 13660{,}8\ N$

Infine si ottiene: $R_{Bx} = R_{Ax} = 13660{,}8\ N$ in modulo

Le forze agenti sulle due aste saranno:

$$R_A = \frac{R_{Ax}}{\cos\alpha} = \frac{13660{,}8}{\cos(45)} = 19319{,}3\ N$$
$$R_B = \frac{R_{Bx}}{\cos\beta} = \frac{13660{,}8}{\cos(60)} = 27321{,}6\ N$$

L'asta AC è sottoposta a trazione mentre l'asta BC è sottoposta a compressione

Scelta del materiale e grado di sicurezza

Si sceglie un acciaio Fe 590 bonificato avete le seguenti caratteristiche:

$$\sigma_r = 590\,\frac{N}{mm^2} \qquad \sigma_s = 315\,\frac{N}{mm^2} \qquad \sigma_D = 295\,\frac{N}{mm^2}$$

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_r} = \frac{315}{590} = 0{,}53 < 0{,}7 \qquad \sigma_{lim} = \sigma_s$$

si impone un grado di sicurezza non inferiore a 2 per cui si ha

$$\gamma = 2$$

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_s}{\gamma} = \frac{315}{2} = 157{,}5\ \frac{N}{mm^2}$$

Calcolo diametri

Per rendere la struttura più rigida si fa l'ipotesi di utilizzare tubi supponendo che sia $\frac{D_i}{D_e}=0{,}9$

l'area è $A=\pi\frac{(D_e^2-D_i^2)}{4}=\pi\frac{(D_e^2-(0{,}9\cdot D_e)^2)}{4}=\pi\frac{(D_e^2-0{,}81\cdot D_e^2)}{4}=\pi\cdot 0{,}19\frac{D_e^2}{4}$

Asta AC

L'asta è un tirante, essa e sottoposta alla sola sollecitazione di trazione

La tensione è:

$$\sigma_1=\frac{R_A}{A_1}=\frac{R_A\cdot 4}{\pi 0{,}19\, D_{1e}^2}$$

Applicando l'equazione di stabilità

$$\sigma_{max}\le\sigma_{am}$$

$$\frac{R_A\cdot 4}{\pi\, 0{,}19\, D_{1e}^2}\le\sigma_{am}$$

$$D_{1e}\ge\sqrt{\frac{R_A\cdot 4}{\pi 0{,}19\,\sigma_{am}}}=\sqrt{\frac{19319{,}3\cdot 4}{\pi\cdot 0{,}19\cdot 157{,}5}}=28{,}67\,mm$$

si sceglie un diametro D_{1e} = 30 mm ed uno spessore di 1,5 mm

$$A_1=\frac{\pi\cdot(D_{1e}^2-D_{1i}^2)}{4}=\frac{\pi\cdot(30^2-27^2)}{4}=134{,}30\ mm^2$$

Asta BC

Per i calcolo del diametro si deve tener conto del fatto che l'asta e soggetta a compressione per cui la si deve verificare anche a carico di punta

Si calcola il diametro facendo riferimento alla compressione

$$\sigma_2=\frac{R_B}{A_2}=\frac{R_B\cdot 4}{\pi 0{,}19\, D_{2e}^2}$$
$$\sigma_{max}\le\sigma_{am}$$
$$\frac{R_B\cdot 4}{\pi\, 0{,}19\, D_{2e}^2}\le\sigma_{am}$$

$$D_{2e}\ge\sqrt{\frac{R_B\cdot 4}{\pi 0{,}19\,\sigma_{am}}}=\sqrt{\frac{27321{,}6\cdot 4}{\pi\cdot 0{,}19\cdot 157{,}5}}=34{,}10\,mm$$

Tra i diametri disponibili si sceglie un diametro di 35 mm con uno spessore di 1,8 mm

Verifica a carico di punta

Calcolo del raggio di inerzia

$$I_{2\min}=\frac{\pi\,(D_{2e}^4-D_{2i}^4)}{64}=\frac{\pi\cdot(35^4-31{,}4^4)}{64}=25943{,}07\ mm^4$$

$$A_2=\frac{\pi\cdot(D_{2e}^2-D_{2i}^2)}{4}=\frac{\pi\cdot(35^2-31{,}4^2)}{4}=187{,}74\ mm^2$$

$$\rho_2=\sqrt{\frac{I_{2\min}}{A_2}}=\sqrt{\frac{25943{,}07}{187{,}74}}=11{,}76\,mm$$

L'asta BC risulta incernierata alle due estremità per cui la lunghezza libera di inflessione l_{02} è proprio pari alla lunghezza dell'asta, il rapporto di snellezza vale:

$$\lambda_2=\frac{l_{02}}{\rho_2}=\frac{3278{,}5}{11{,}76}=278{,}78$$

con questo valore della snellezza è necessario effettuare la verifica a carico di punta.

La formula di Eulero per il calcolo della forza critica è

$$P_{cr}=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I}{l_0^2}$$

deve essere soddisfatta valere la relazione

$$\frac{p_{cr}}{\gamma_{cr}}\geq P \qquad \frac{\pi^2\cdot E\cdot I_{min}}{\gamma_{cr}\cdot l_0^2}\geq P$$

dove E è il modulo di Young essendo il materiale acciaio si ha E = 210000 N/mm^2
I_{min} è il momento di inerzia minimo, nel caso in esame I_{min} = 25943,07' mm^4
l_0 è la lunghezza libera di inflessione, essendo l'asta è vincolata con due cerniere si ha $l_0 = l_2$= 3278,5 mm
γ è il coefficiente di sicurezza che poniamo pari a 3

da cui

$$I_{2\min}=\frac{P\cdot l_0^2\cdot\gamma}{\pi^2\cdot E}=\frac{27321{,}6\cdot 3278{,}5^2\cdot 3}{\pi^2\cdot 210000}=425068{,}3012\ mm^4$$

dalla definizione del momento di inerzia

$$I_x=\frac{\pi\cdot(D_e^4-D_i^4)}{64}=\frac{\pi\cdot(D_e^4-(0{,}9\cdot D_e^4))}{64}=\frac{\pi\cdot D_e^4(1-0{,}9^4)}{64}=0{,}3439\cdot\frac{\pi\cdot D_e^4}{64}$$

si ha

$$D_{2e}=\sqrt[4]{\frac{I_{2\min}\cdot 64}{0{,}3439\,\pi}}=\sqrt[4]{\frac{425068{,}3012\cdot 64}{0{,}3439\cdot\pi}}=70{,}84\ mm$$

si deve scegliere un diametro di 76,1 mm con uno spessore di 5 mm

$$I_{2\min}=\frac{\pi\cdot(D_2e^4-D_{2i}^4)}{64}=\frac{\pi\cdot(76{,}1^4-66{,}1^4)}{64}=709220{,}30\,mm^4$$

$$A_2=\frac{\pi\cdot(D_{2e}^2-D_{2i}^2)}{4}=\frac{\pi\cdot(76{,}1^2-66{,}1^2)}{4}=1116{,}84\ mm^2$$

$$\rho_2=\sqrt{\frac{I_{2\min}}{A_2}}=\sqrt{\frac{709220{,}30}{1116{,}84}}=25{,}20\,mm$$

snellezza

$$\lambda_2=\frac{l_{20}}{\rho_2}=\frac{3278{,}5}{25{,}20}=130{,}10$$

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2E}{\lambda_2^2}=\frac{\pi^2\cdot210000}{130{,}10^2}=122{,}45\frac{N}{mm^2}$$

valore inferiore alla tensione di snervamento

Calcolo dello spostamento punto C

Calcolo con analisi geometrica

Si pone $l_1 = l_{AC} = 4015{,}3$ mm e $l_2 = l_{BC} = 3278{,}5$ mm

L'asta AC, sottoposta a trazione, si allunga di Δl_1 mentre l'asta BC, sottoposta a compressione, si accorcia di Δl_2

La deformazione nel caso di trazione-compressione è $\Delta l=\frac{F\cdot l}{EA}$

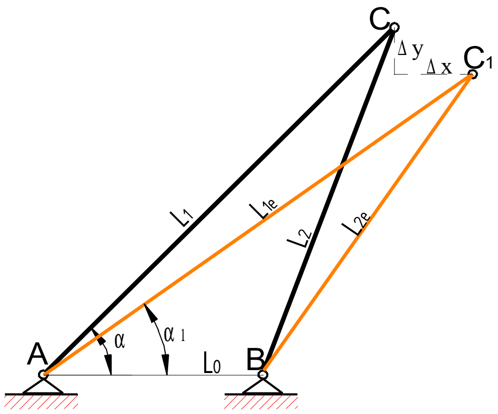
$$A_1=\frac{\pi\cdot(D_{1e}^2-D_{1i}^2)}{4}=\frac{\pi\cdot(30^2-27^2)}{4}=134{,}30\ mm^2$$

$$\Delta l_1=\frac{R_A\cdot l_1}{EA_1}=\frac{19319{,}3\cdot4015{,}3}{210000\cdot134{,}30}=2{,}75\,mm$$

$$\Delta l_2=\frac{R_B\cdot l_2}{EA_2}=\frac{27321{,}6\cdot3278{,}5}{210000\cdot1116{,}84}=0{,}38\,mm$$

$$l_{1e}+\Delta l_1=4015{,}3+2{,}75=4018{,}05\,mm$$

$$l_{2e}-\Delta l_2=3278{,}12-0{,}38=3278{,}12\,mm$$



applicando il teorema di Carnot al triangolo ABC_1 è possibile ricavare l'angolo α_1

$$\alpha_1=\arccos\left(\frac{l_{1e}^2+l_0^2-l_{2e}^2}{2\cdot l_{1e}^2\cdot l_0^2}\right)=\arccos\left(\frac{4018{,}05^2+1200^2-3278{,}12^2}{2\cdot4018{,}05\cdot1200}\right)=44{,}83\,°$$

$$\Delta y=l_{1e}\cdot sen(\alpha_1)-l_1\cdot sen(\alpha)=4018{,}05\cdot sen(44{,}83)-4015{,}3\cdot sen(45)=-6{,}33\,mm$$

$$\Delta x=l_{1e}\cdot\cos(\alpha_1)-l_1\cdot\cos(\alpha)=4018{,}05\cdot\cos(44{,}83)-4015{,}3\cdot\cos(45)=10{,}20\,mm$$

Calcolo con il metodo dell'energia

Applicando la forza F la struttura si deforma ed il punto C si sposta nel punto C_1 la forza F compie un lavoro mentre le due aste si deformano e, essendo in condizioni di elasticità, accumulano una certa energia di deformazione (si comportano come delle molle), il lavoro e le energie accumulate sono uguali.

Posto L_d il lavoro fatto dalla forza, U_1 l'energia accumulata dall'asta 1 e U_2 l'energia accumulata dall'asta 2 si ha:
$$L_d = U_1 + U_2$$

Le due energie saranno:

$$U_1 = \frac{R_A^2 \cdot l_1}{2 \cdot E \cdot A_1} = \frac{19319{,}3^2 * 4015{,}3}{2 \cdot 210000 \cdot 134{,}30} = 26568{,}4 \quad Nmm$$

$$U_2 = \frac{R_B^2 \cdot l_2}{2 \cdot E \cdot A_2} = \frac{27321{,}6^2 * 3278{,}5}{2 \cdot 210000 \cdot 1116{,}8} = 5217{,}3 \quad Nmm$$

La formula del lavoro è
$$L_d = \frac{1}{2} \cdot F \, \Delta y$$

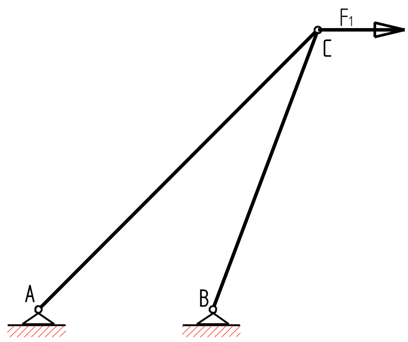
$$\Delta y = \frac{2(U_1 + U_2)}{F} = \frac{2 \cdot (26568{,}4 + 5217{,}3)}{10000} = 6{,}35 \, mm$$

Valore quasi uguale a quello trovato in precedenza.

Calcolo con il principio dei lavori virtuali.

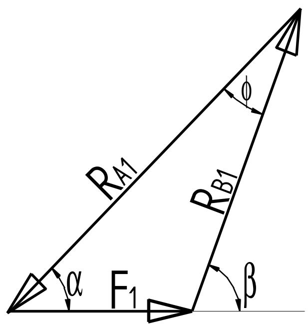
Si usa il P.L.V. per calcola lo spostamento orizzontale della cerniera C.
Si pone nella cerniera C una forza orizzontale F_1come nel disegno a lato

Nella stessa cerniera agiscono oltre a F_1 anche le reazioni R_{A1} ed R_{B1} agenti sulle due aste AC e BC; esse avranno come direzione la direzione delle rispettive aste.



Imponendo la condizione di equilibrio della cerniera C le forza agenti devono formare un poligono chiuso come riportata nella figura che segue.

Per il teorema dei seni si ottiene:
$$\frac{F_1}{sen(\phi)} = \frac{R_{B1}}{sen(\theta)} = \frac{R_{A1}}{sen(\alpha)}$$



$$R_{A1} = F_1 \cdot \frac{sen(\theta)}{sen(\phi)} = F_1 \cdot \frac{sen(120)}{sen(15)} = F_1 \cdot 3{,}35 \, N$$
$$R_{B1} = F_1 \cdot \frac{sen(\alpha)}{sen(\phi)} = F_1 \cdot \frac{sen(45)}{sen(15)} = F_1 \cdot 2{,}73 \, N$$

Anche i questo caso l'asta AC è sottoposta a trazione mentre l'asta BC è soggetta a compressione

Applicando il principio dei lavori virtuali si ha:

$$F_1 \cdot \Delta x = \int_A^C \frac{R_A \cdot R_{A1}}{E \cdot A_1} dz + \int_B^C \frac{R_B \cdot R_{B1}}{E \cdot A_2} dz$$

$$F_1 \cdot \Delta x = \frac{R_A \cdot F_1 \cdot 3{,}35 \cdot L_{AC}}{E \cdot A_1} + \frac{R_B \cdot F_1 \cdot 2{,}73 \cdot L_{BC}}{E \cdot A_2}$$

semplificando la F1 e sostituendo i rispettivi valori si ottiene:

$$\Delta x = \frac{19319{,}3 \cdot 3{,}35 \cdot 4015{,}3}{210000 \cdot 134} + \frac{27321{,}6 \cdot 2{,}73 \cdot 3278{,}5}{210000 \cdot 1114{,}84} = 9{,}22 + 1{,}042 = 10{,}26\, mm$$

valore molto prossimo a quello trovato in precedenza.

Applicando il teorema dei seni ai triangoli formati dalla forza e dalle sue componenti si ricava il valore delle Forza R_B ed R_A (in kN)

$$R_B = \frac{10}{sen(15)} sen(135) = 27{,}32\, kN$$

$$R_A = \frac{10}{sen(30)} sen(135) = 14{,}14\, kN$$