MECCANICA APPLICATA MACCHINE A FLUIDO

Sessione estiva 1970

Tra un motore e una macchina operatrice si deve realizzare il rapporto di trasmissione 1: 60 a mezzo di un rotismo ordinario con ruote cilindriche a denti diritti.
Il motore ha una potenza P 5 kW e compie n = 2930 giri/min.
Il candidato, prestabilito il numero degli alberi di rinvio, ciascuno su cuscinetti a sfere, e i rapporti di trasmissione parziali, tracci uno schema del rotismo e calcoli il numero di giri di ciascun albero e della macchina operatrice.
Assegni i numeri di denti di ciascuna ruota, valuti il rendimento del rotismo (trascurare le perdite nei cuscinetti) e calcoli la potenza sulla macchina operatrice e il corrispondente momento.
Assunti, infine, a proprio criterio il materiale ed ogni altro dato occorrente, calcoli i moduli delle dentature delle due ruote calettate sul primo albero di rinvio

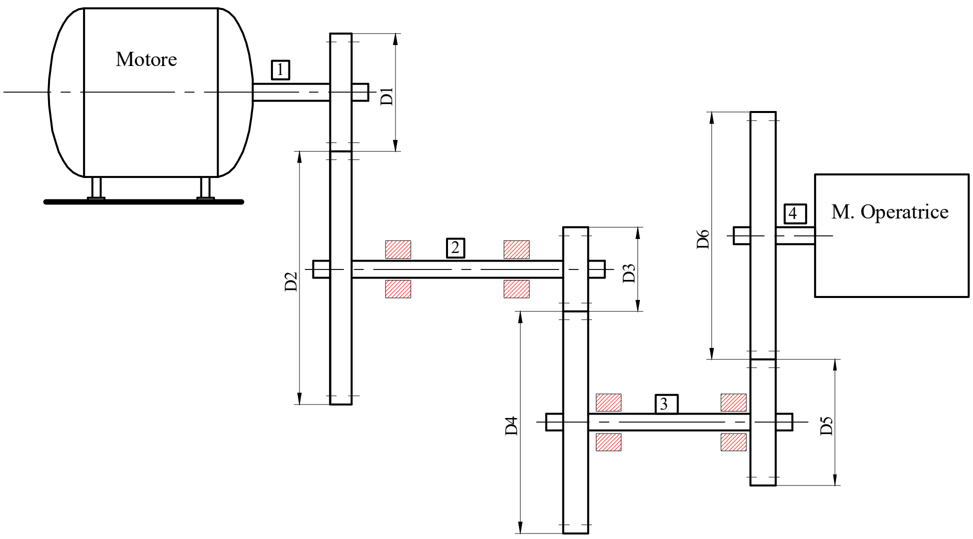
Ipotesi di soluzione

Per iniziare definiamo le caratteristiche meccaniche del materiale delle ruote

Dal "Manuale di Meccanica" ed. Hoepli:
per le ruote dentate si sceglie l'acciaio 25 CrMo 4 che ha:

- tensione di rottura $R_m = 900$ [N/mm^2],
- tensione di snervamento $R_s = 700$ [N/mm^2],
- durezza Brinell $HB = 255$,
- modulo di Young $E = 200\,000$ [N/mm^2],

Considerando il rapporto di trasmissione totale pari a 60 si decide di ottenerlo mediante un rotismo formato da 3 accoppiamenti utilizzando due alberi di rinvio come evidenziato nella figura che segue.



Con questo tipo di ruotismo vale la relazione

$$i_t = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3$$

dove i_1 è il rapporto di trasmissione del primo ingranaggio, i_2 quello del secondo e i_3 del terzo.

Si sceglie: $i_1=5$, $i_2=4$, $i_3=3$.

La velocità angolare dell'albero motore è:

$$\omega_1=\frac{2\cdot\pi n_1}{60}=\frac{2\cdot\pi\cdot 2930}{60}=306{,}83 \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

le velocità di rotazione degli altri alberi saranno rispettivamente:

$$n_2=\frac{n_1}{i_1}=\frac{2930}{5}=586 \left[\frac{giri}{min}\right] \quad \Rightarrow \quad \omega_2=\frac{2\cdot\pi n_2}{60}=\frac{2\cdot\pi\cdot 586}{60}=61{,}37 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$n_3=\frac{n_2}{i_2}=\frac{586}{4}=146{,}5 \left[\frac{giri}{min}\right] \quad \Rightarrow \quad \omega_3=\frac{2\cdot\pi n_3}{60}=\frac{2\cdot\pi\cdot 146{,}5}{60}=15{,}34 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$n_4=\frac{n_3}{i_3}=\frac{146{,}5}{3}=48{,}83 \left[\frac{giri}{min}\right] \quad \Rightarrow \quad \omega_4=\frac{2\cdot\pi n_4}{60}=\frac{2\cdot\pi\cdot 48{,}83}{60}=5{,}11 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Si ipotizza che i tre accoppiamenti abbiano dei rendimenti pari rispettivamente a:

$$\eta_1 = 0{,}98 \qquad \eta_2 = 0{,}97 \qquad \eta_3 = 0{,}97$$

Le potenze saranno:

Per l'albero motore $P_1= 5\ [kW]$

Per gli altri alberi

$$P_2=P_1\cdot\eta_1 = 5\cdot 0{,}98=4{,}90 \ [kW]$$

$$P_3=P_2\cdot\eta_2 = 4{,}9\cdot 0{,}97=4{,}75 \ [kW]$$

$$P_4=P_3\cdot\eta_3 = 4{,}76\cdot 0{,}97=4{,}61 \ [kW]$$

Infine si ricavano i vari momenti agenti sugli alberi, da quello del motore a quello della macchina operatrice finale

$$Mt_1 = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{5000}{306{,}83} = 16{,}2957 \ [Nm] = 16295{,}7 \ [Nmm]$$

$$Mt_2 = \frac{P_2}{\omega_2} = \frac{4900}{61{,}37} = 79{,}8491 \ [Nm] = 79\ 849{,}1 \ [Nmm]$$

$$Mt_3 = \frac{P_3}{\omega_3} = \frac{4750}{15{,}34} = 309{,}8144 \ [Nm] = 309814{,}4 \ [Nmm]$$

$$Mt_4 = \frac{P_4}{\omega_4} = \frac{4610}{5{,}11} = 901{,}6698 \ [Nm] = 901669{,}8 \ [Nmm]$$

Calcolo ruote dentate

Definito u_1 come rapporto di ingranaggio del primo accoppiamento si ha:

$$u_1 = i_1 = 5$$

Il numero di minimo di denti è:

$$z_{1\,min} = \frac{2}{\sqrt{[u_1^2+(1+2\cdot u_1)\cdot sen(2\cdot\alpha)]}-u_1} = \frac{2}{\sqrt{[5^2+(1+2\cdot 5)\cdot sen(2\cdot 20)]}-5}=15{,}74$$

Si sceglie per il pignone $z_1=22$ denti e si ricava quello della corona $z_2 = i_1\cdot z_1 = 5\cdot 22 = 110$

Per il calcolo del modulo, delle due ruote, si ipotizza

- una velocità periferica superiore a 3 [*m/s*] per cui il calcolo sarà effettuato ad usura
- il numero di ore di funzionamento sia pari a 15000 [h]

la pressione ammissibile sarà:

$$p_{am\,1}=24{,}5\cdot\frac{HB}{\sqrt[6]{n_1\cdot h}}=24{,}5\cdot\frac{255}{\sqrt[6]{2930\cdot 15000}}=332{,}57\ \ [MPa]$$

Per il calcolo del modulo si devono trovare i valori di due costanti K_E e k_1,
ricordando che $E_2=E_1=E=200000[N/mm^2]$ si ha

$$K_E=1{,}18\cdot\sqrt{\frac{E_1\cdot E_2}{E_1+E_2}}=1{,}18\cdot\sqrt{\frac{200000^2}{2\cdot 200000}}=1{,}18\cdot\sqrt{\frac{200000}{2}}=373{,}15\quad\left[\frac{\sqrt{N}}{mm}\right]$$

con un angolo di pressione α=20° si calcola k_1

$$k_1=\sqrt[3]{\frac{2\cdot K_E^2}{z_1^2\cdot sen(2\cdot\alpha)}\cdot\left(1+\frac{z_1}{z_2}\right)}=\sqrt[3]{\frac{2\cdot 373{,}15^2}{20^2\cdot sen(2\cdot 20\,°)}\cdot\left(1+\frac{21}{100}\right)} = 10{,}24\quad\left[\sqrt[3]{\frac{N}{mm^2}}\right]$$

ipotizzando che sia $\lambda_1=\frac{b}{z}=20$, è possibile calcolare il modulo

$$m_{1\,min}\geqslant k_1\cdot\sqrt[3]{\frac{M_{t1}}{\lambda_1\cdot p_{am\,1}^2}} = 10{,}91\cdot\sqrt[3]{\frac{16295{,}7}{20\cdot 332{,}57^2}} = 1{,}99\ \ [mm]$$

Si sceglie un modulo m_1=2 [mm],i due diametri primitivi sono:

$$D_{p\,1} = m_1\cdot z_1 = 2\cdot 22 = 44\ \ [mm] \qquad\qquad D_{p2} = D_{p\,1}\cdot i_1 = 44\cdot 5 = 220\ \ [mm]$$

La larghezza delle due ruote dentate vale:

$$B_1 = \lambda_1\cdot m_1 = 20\cdot 2 = 40\ \ [mm]$$

La velocità periferica è:

$$v = \omega_1\cdot\frac{D_{p1}}{2} = 306{,}83\cdot\frac{44}{2\cdot 1000} = 6{,}75\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

essa è effettivamente superiore a 3 m/s.

Calcolo secondo ingranaggio , ruote 3 e 4

Si sceglie anche per la ruota 3 come numero di denti z_3=22 per cui $z_4 = i_2 z_3 = 4 \cdot 22 = 88$

Il valore di K_E è uguale a quello calcolato in precedenza, ed ipotizzando ancora $\lambda_2 = 18$ si ha:

$$k_2 = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot K_E^2}{z_3^2 \cdot sen(2 \cdot \alpha)} \cdot \left(1 + \frac{1}{u_2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 373{,}15^2}{22^2 \cdot sen(2 \cdot 20°)} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = 10{,}38 \quad \left[\sqrt[3]{\frac{N}{mm^2}}\right]$$

e

$$p_{am\,2} = 24{,}5 \cdot \frac{HB}{\sqrt[6]{n_2 \cdot h}} = 24{,}5 \cdot \frac{255}{\sqrt[6]{586 \cdot 15000}} = 434{,}89 \quad [MPa]$$

si calcola il modulo

$$m_{2\,min} \geqslant k_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{t2}}{\lambda_2 \cdot p_{am\,2}^2}} = 11{,}06 \cdot \sqrt[3]{\frac{79849{,}1}{18 \cdot 434{,}89^2}} = 2{,}97 \quad [mm]$$

Si sceglie un modulo m_2=3 [mm], i due diametri primitivi sono:

$$D_{p3} = m_2 \cdot z_3 = 3 \cdot 22 = 66 \quad [mm] \qquad\qquad D_{p4} = D_{p3} \cdot i_2 = 66 \cdot 4 = 264 \quad [mm]$$

La larghezza delle due ruote dentate vale:

$$B_2 = \lambda_2 \cdot m_2 = 18 \cdot 3 = 54 \quad [mm]$$

In modo analogo si ottiene per il terzo ingranaggio:

modulo m_3=3 mm, $\lambda_2 = 18$ numero di denti z_5=22 e $z_6 = i_3 \cdot z_5 = 3 \cdot 22 = 66$

$$D_{p5} = m_3 \cdot z_5 = 3 \cdot 22 = 66 \quad [mm] \qquad\qquad D_{p6} = D_{p5} \cdot i_3 = 66 \cdot 3 = 198 \quad [mm]$$

La larghezza delle due ruote dentate vale:

$$B_3 = \lambda_3 \cdot m_3 = 18 \cdot 3 = 54 \quad [mm]$$