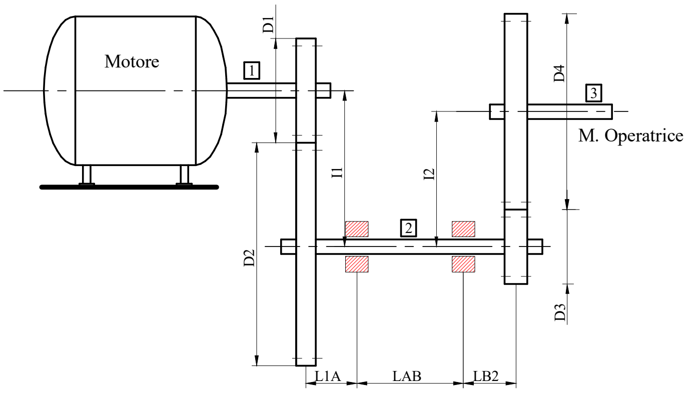
MECCANICA APPLICATA MACCHINE A FLUIDO

Sessione ordinaria 1982

Una macchina operatrice, ruotante a 200 giri/min, è azionata da un motore di velocità pari a 1600 giri/min, mediante due coppie di ruote dentate a denti diritti di acciaio al Ni Cr.
L'albero di rinvio, di sezione costante, su cui sono montate due delle quattro ruote, è lungo 600 mm ed ha i supporti alle estremità piani mediani delle due ruote su di esso calettate distano 150 mm dall'appoggio vicino.
Il candidato, supposto che la potenza da trasmettere sia di 30 kW ed assumendo opportunamente ogni altro dato mancante, determini i diametri primitivi delle due coppie dei ruote dentate ed il diametro dell'albero di rinvio, illustrando i calcoli con opportuni schizzi e disegni.



Ipotesi di soluzione

Per iniziare definiamo le caratteristiche meccaniche del materiale delle ruote e scegliamo il materiale dell'albero.

Dal "Manuale di Meccanica" ed. Hoepli:
per le ruote dentate si sceglie l'acciaio 16 Ni Cr 4 che ha:
- tensione d rottura R_{mr} = 830 [N/mm^2],
- durezza Brinell HB = 217 ,
- modulo di Young E = 200 000 [N/mm^2],

per gli alberi invece si ipotizza l'uso di un acciaio C60 bonificato che ha:
- tensione di rottura R_{ma} = 750 [N/mm^2],
- tensione di snervamento R_{sa} = 520 [N/mm^2],

Dai dati forniti ricaviamo il rapporto totale della trasmissione tra l'albero del motore e quello dalla macchina operatrice:

$$i_t = \frac{n_1}{n_3} = \frac{1600}{200} = 8 \quad ,$$

La trasmissione della potenza avviene mediante un albero di rinvio e due ingranaggi, in questi casi vale la relazione

$$i_t = i_1 \cdot i_2$$

dove i_1 è il rapporto di trasmissione del primo ingranaggio e i_2 quello del secondo ingranaggio.
Si sceglie i_1=2,5 per cui si ha i_2=3,2.

Per dimensionare l'albero di rinvio, come richiesto dalla traccia, è necessario conoscere i carichi che agiscono su di esso; per fare ciò si devono definire le dimensioni delle quattro ruote dentate.

Determiniamo la velocità angolare dell'albero motore

$$\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi\, n_1}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1600}{60} = 167{,}6 \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

e la coppia motrice che agisce e sul pignone 1

$$Mt_1 = \frac{P}{\omega_1} = \frac{30000}{167{,}6} = 179{,}0493 \;\; [Nm] = 179\ 049{,}30 \;\; [Nmm]$$

Calcolo ruote dentate

Definito u_1 come rapporto di ingranaggio del primo accoppiamento si ha:

$$u_1 = i_1 = 2{,}5$$

Ricaviamo il numero minimo di denti è:

$$z_{1\,min} = \frac{2}{\sqrt{[u^2 + (1 + 2 \cdot u) \cdot sen(2 \cdot \alpha)]} - u} = \frac{2}{\sqrt{[2{,}5^2 + (1 + 2 \cdot 2{,}5) \cdot sen(2 \cdot 20)]} - 2{,}5} = 14{,}63$$

Scegliamo come numero di denti del pignone z_1=18 e ricaviamo quello della corona

$$z_2 = i_1 \cdot z_1 = 2{,}5 \cdot 18 = 45$$

Per il calcolo del modulo, delle due ruote, si ipotizza

- una velocità periferica superiore a 3 [*m/s*] per cui il calcolo sarà effettuato ad usura
- il numero di ore di funzionamento sia pari a 15000 [h]

la pressione ammissibile sarà:

$$p_{am} = 24{,}5 \cdot \frac{HB}{\sqrt[6]{n_1 \cdot h}} = 24{,}5 \cdot \frac{217}{\sqrt[6]{1600 \cdot 15000}} = 313{,}03 \quad [MPa]$$

Per il calcolo della pressione massima si devono trovare i valori di due costanti K_1 e k, ricordando che $E_2 = E_1 = E = 200000 [N/mm^2]$ si ha

$$K_1 = 1{,}18 \cdot \sqrt{\frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}} = 1{,}18 \cdot \sqrt{\frac{200000^2}{2 \cdot 200000}} = 1{,}18 \cdot \sqrt{\frac{200000}{2}} = 373{,}15 \quad \left[\frac{\sqrt{N}}{mm}\right]$$

con un angolo di pressione α=20° otteniamo

$$k = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot K_1^2}{z_1^2 \cdot sen(2 \cdot \alpha)} \cdot \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 373{,}15^2}{18^2 \cdot sen(2 \cdot 20°)} \cdot \left(1 + \frac{18}{45}\right)} = 12{,}32 \quad \left[\sqrt[3]{\frac{N}{mm^2}}\right]$$

ipotizzando che sia $\lambda_1 = \frac{b}{z} = 16$, è possibile calcolare il modulo

$$m \geqslant k \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{t1}}{\lambda \cdot p_{am}^2}} = 12{,}32 \cdot \sqrt[3]{\frac{179049{,}3}{16 \cdot 313{,}03^2}} = 5{,}97 \quad [mm]$$

Scegliamo un modulo m_1=6 mm,i due diametri primitivi sono:

$$D_{p1} = m_1 \cdot z_1 = 6 \cdot 18 = 108 \ [mm] \qquad D_{p2} = D_{p1} \cdot i = 108 \cdot 2{,}5 = 270 \ [mm]$$

La larghezza delle due ruote dentate vale:

$$B_1 = \lambda_1 \cdot m_1 = 16 \cdot 6 = 96 \ [mm]$$

La velocità periferica è:

$$v = \omega_1 \cdot \frac{D_{p1}}{2} = 167{,}6 \cdot \frac{108}{2 \cdot 1000} = 9{,}05 \ \left[\frac{m}{s}\right]$$

essa è effettivamente superiore a 3 m/s.

La velocità angolare dell'albero di rinvio vale

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i_1} = \frac{167{,}6}{2{,}5} = 67{,}04 \ \left[\frac{rad}{s}\right] \qquad n_2 = \frac{n_1}{i_1} = \frac{1600}{2{,}5} = 640 \ \left[\frac{gini}{min}\right]$$

Il momento agente su tutto l'albero è

$$Mt_2 = \frac{P}{\omega_2} = \frac{30000}{67{,}04} = 447{,}49403 \ [Nm] = 447\ 494{,}03 \ [Nmm]$$

Determiniamo le dimensioni del secondo ingranaggio (ruote 3 e 4)

Il relativo numero minimo di denti è:

$$z_{3\,min} = \frac{2}{\sqrt{[u^2 + (1 + 2 \cdot u) \cdot sen(2 \cdot \alpha)] - u}} = \frac{2}{\sqrt{[3{,}2^2 + (1 + 2 \cdot 3{,}2) \cdot sen(2 \cdot 20)] - 3{,}2}} = 15{,}093$$

Per mantenere il rapporto di trasmissione pari a 3,2 e tenendo in conto che il numero di denti delle ruote devono essere per forza numeri interi, i valori possibili per z_3 sono 15 e 20.

Scegliamo z_3=20 e ricaviamo il numero di denti della quarta ruota $z_4 = i_2 \cdot z_3 = 3{,}2 \cdot 20 = 64$

Calcoliamo adesso il modulo per questo accoppiamento.

$$k_3 = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot K_1^2}{z_3^2 \cdot sen(2 \cdot \alpha)} \cdot \left(1 + \frac{z_3}{z_4}\right)} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 373{,}15^2}{20^2 \cdot sen(2 \cdot 20°)} \cdot \left(1 + \frac{20}{64}\right)} = 11{,}24 \ \left[\sqrt[3]{\frac{N}{mm^2}}\right]$$

ipotizzando che sia $\lambda_3 = \frac{b_3}{z_3} = 15$, è possibile calcolare il modulo

$$p_{am2} = 24{,}5 \cdot \frac{HB}{\sqrt[6]{n_2 \cdot h}} = 24{,}5 \cdot \frac{217}{\sqrt[6]{640 \cdot 15000}} = 428{,}54 \quad [MPa]$$

$$m_2 \geq k_3 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{t2}}{\lambda_3 \cdot p_{am2}^2}} = 11{,}24 \cdot \sqrt[3]{\frac{179049{,}3}{16 \cdot 428{,}54^2}} = 6{,}83 \ [mm]$$

Scegliamo un modulo m_1=7 mm e quindi:

$$D_{p3} = m_2 \cdot z_3 = 7 \cdot 20 = 140 \ \ [mm] \qquad\qquad D_{p4} = D_{p3} \cdot i2 = 140 \cdot 3{,}2 = 448 \ \ [mm]$$

$$B_2 = \lambda_2 \cdot m_2 = 15 \cdot 7 = 105 \ \ [mm]$$

Calcolo albero di rinvio

Dal manuale di meccanica menzionato in precedenza, poniamo il coefficiente di sicurezza dell'albero γ_a =4 e ricaviamo le tensioni ammissibili:

$$\sigma_{ama} = \frac{R_{ma}}{\gamma_a} = \frac{750}{4} = 187{,}5 \ \ [MPa] \quad \text{e} \quad \tau_{ama} = \frac{\sigma_{ama}}{\sqrt{3}} = \frac{187}{\sqrt{3}} = 108{,}25 \ \ [MPa]$$

Per iniziare ricaviamo le forze ed momenti agenti sull'albero.

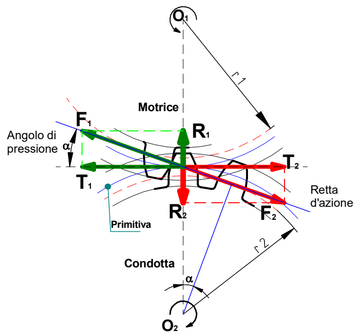


Figura: A

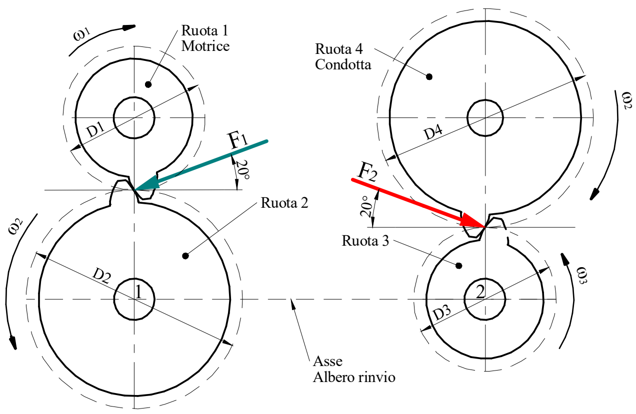
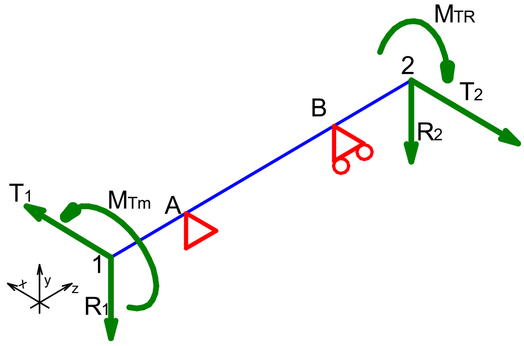


Figura B

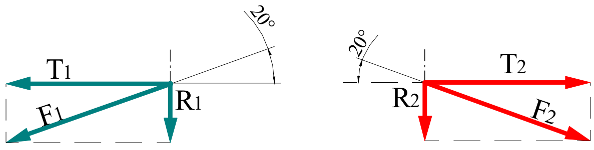
Con riferimento alle figure A e B

- nella figura A sono riportate le azioni che si scambiano i denti di una ruota dentata quando ingranano: esistono due forze, uguali e contrarie, alla forza fatta dalla ruota motrice su quella mossa (in rosso in figura) si oppone una forza di reazione (in verde in figura) della ruota condotta:
- nella figura B sono riportati i due ingranaggi e le forze che agiscono sulle ruote calettate sull'albero di rinvio.

Nelle figura che segue riportiamo un'assonometria dell'albero con le forze ed i momenti agenti, in particolare delle due forze sono riportate le componenti radiali e tangenziali.



Calcoliamo adesso l'intensità delle due forze F e delle componenti R e T riportate nella figura che segue.



Sulla ruota 2 calettata nella sezione1si ha

$$T_1 = \frac{2 \cdot M_{t2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 447620}{270} = 3315{,}7 \ \ [N] \qquad R_1 = T_1 tg(\alpha) = 3315{,}7 \cdot tg(20) = 1206{,}82 \ \ [N]$$

$$F_1 = \frac{T_1}{\cos(\alpha)} = \frac{3315{,}7}{\cos(20)} = 3528{,}5 \ \ [N]$$

Sulla ruota 3 calettata nella sezione 2

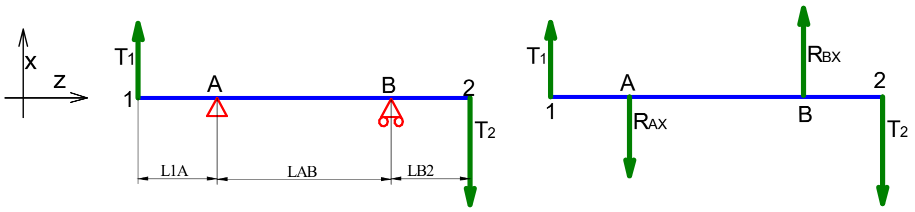
$$T_2 = \frac{2 \cdot M_{t2}}{D_3} = \frac{2 \cdot 447620}{140} = 6394{,}57 \ \ [N] \qquad R_2 = T_2 tg(\alpha) = 6394{,}57 \cdot tg(20) = 2327{,}43 \ \ [N]$$

$$F_2 = \frac{T_2}{\cos(\alpha)} = \frac{6394{,}57}{\cos(20)} = 6804{,}96 \ \ [N]$$

Analizziamo adesso le azioni interne all'albero nei due piani xz e yz

<u>Piano xz</u>

Disegniamo lo schema dell'albero e del relativo corpo libero associato.



Per il calcolo delle reazioni vincolari applichiamo due volte la relazione $\sum M_y = 0$
Calcoliamo i momenti rispetto al punto A

$$T_1 \cdot L_{1A} + T_2 \cdot L_{A2} - R_{Bx} \cdot L_{AB} = 0$$

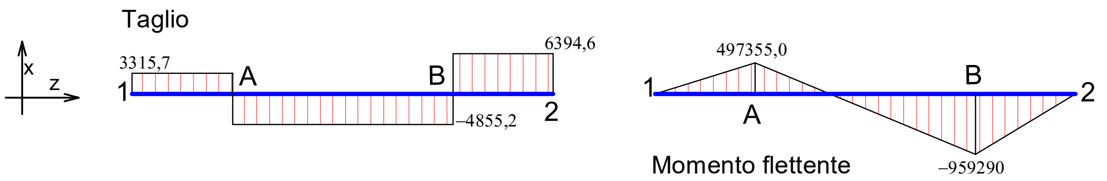
$$R_{Bx} = \frac{T_1 \cdot L_{1A} + T_2 \cdot L_{A2}}{L_{AB}} = \frac{3315{,}7 \cdot 150 + 6394{,}6 \cdot 450}{600} = 11249{,}7 \ \ [N]$$

Calcoliamo i momenti rispetto al punto B

$$T_1 \cdot L_{1B} + T_2 \cdot L_{B2} - R_{Ax} \cdot L_{AB} = 0$$

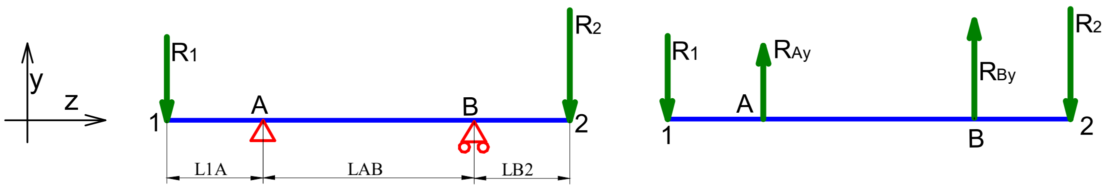
$$R_{Ax} = \frac{T_1 \cdot L_{1B} + T_2 \cdot L_{B2}}{L_{AB}} = \frac{3315{,}7 \cdot 450 + 6394{,}6 \cdot 150}{600} = 8170{,}9 \ \ [N]$$

Il diagramma dell'andamento del taglio e del momento flettente Mfy sono rappresentati nei grafici che seguono



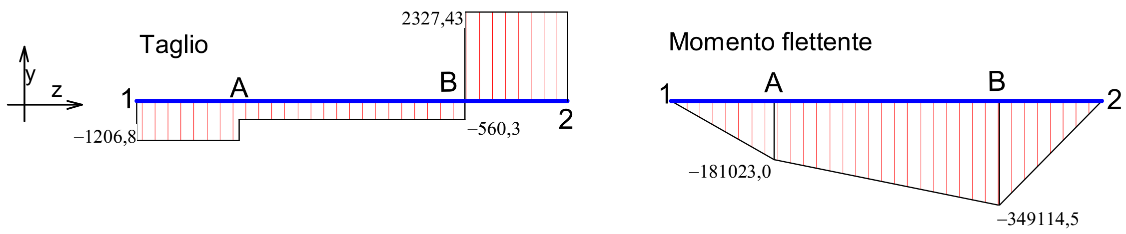
Piano yz

In modo analogo al calcolo predente si trovano le reazioni vincolari che valgono

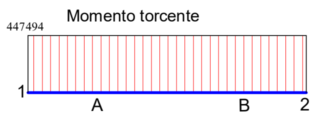


$$R_{By} = 2887{,}7 \ \ [N] \qquad\qquad R_{Ay} = 646{,}50 \ \ [N]$$

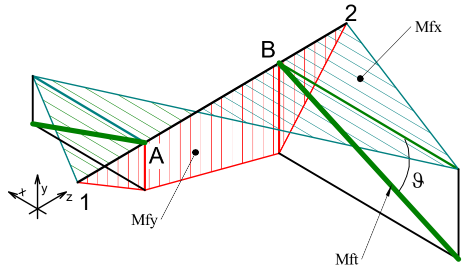
Il diagramma dell'andamento del taglio e del momento flettente Mfx sono rappresentati nei grafici che seguono



Il momento torcente è costate su tutto l'albero ed è pari a Mt_2



Nel diagramma che segue sono riportati i diagramma dei momenti nei due piani e il momento totale selle sezioni A e B



Il momento flettente massimo si ha nella sezione B e vale

$$M_{ft} = \sqrt{Mf_{xB}^2 + Mf_{yB}^2} = \sqrt{349114^2 + 959290^2} = 1020741 \ [Nmm] = 1020{,}74 \ [Nm]$$

In questa sezione agisce anche il momento torcente M_{t1} per cui il momento flettente ideale nella sezione vale

$$Mf_{ip} = \sqrt{M_{ft}^2 + 0{,}75\, M_{T2}^2} = \sqrt{1020841^2 + 0{,}75\, 447494^2} = 1091887{,}5 \ [Nmm] = 1091{,}88 \ [Nm]$$

Siamo adesso in gradi di ricavare il diametro minimo della sezione B

$$d_B \geqslant \sqrt[3]{\frac{32 \cdot Mf_{ip}}{\pi \cdot \sigma_{ama}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1091887{,}5}{\pi \cdot 187{,}5}} = 38{,}999 \quad [mm]$$

Considerando i diametri interni dei cuscinetti si hanno i seguenti valori 40, 45, 50 mm

Scegliamo come diametro il valore 40 mm, useremo lo stesso cuscinetto anche nella sezione A

Nelle sezioni di estremità 1 e 2 agisce il solo momento torcente per cui:

$$d_2 \geqslant \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{T2}}{\pi \cdot \tau_{ama}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 447620}{\pi \cdot 108{,}25}} = 27{,}62 \ [mm]$$

Se la trasmissione della coppia avviene mediante linguetta, per tener conto della cava di quest'ultima, il diametro minimo dovrà essere maggiorato di 5 mm per cui sceglie un diametro D_1=D_2= 35 mm