

# Calcoli Economici

## Nomenclatura

- $i$  = tasso interesse del periodo
- $n$  = numeri di periodi
- $P$  = valore attuale (capitale al tempo iniziale)
- $F$  = valore finale
- $A$  = rata di ammortamento
- $I$  = interesse maturato

## Definizioni

Il denaro può essere considerato come una merce che può essere prestato, depositato, investito. Definiamo **capitale  $P$**  una somma che si presta o si deposita o si investe; al momento della restituzione del **capitale**, chi ha ricevuto il prestito (o il deposito) deve aggiungere, alla somma iniziale un'altra che si definisce **interesse  $I$**  a pagamento per il suo uso.

$$F = P + I$$

in genere l'interesse è calcolato come percentuale del capitale iniziale.

$$I = i \cdot P$$

dove  $i$  è detto tasso di interesse (o di sconto) valutato con riferimento ad un dato periodo di tempo che in genere è un anno.

Il calcolo degli interessi può essere fatto secondo due modalità:

1. a **capitalizzazione semplice**: per il calcolo degli interessi dei singoli periodi si fa riferimento sempre e solo al capitale iniziale  $P$ :  $I_n = i \cdot P$
2. a **capitalizzazione composta**: per il calcolo degli interessi dei singoli periodi si fa riferimento al valore finale del periodo precedente, questo significa che gli interessi di un periodo si calcolano oltre che sul capitale anche sugli interessi già maturati:  $I_n = i \cdot F_{n-1}$

Calcoli per pagamenti in unica soluzione.

Si ipotizza di effettuare un deposito (chiedere un prestito) in banca. La somma depositata (chiesta in prestito), e gli interessi maturati, sono prelevati (restituiti) in una unica soluzione dopo un un lasso di tempo, che può corrispondere ad uno o più periodi; si ipotizza che il tasso di interesse  $i$  dei singoli periodi rimanga costante.

Capitalizzazione semplice:

si ha :

$$I_1 = I_2 \dots = I_n = I = i \cdot P$$
$$F = P + I_1 + I_2 + \dots + I_n = P + n \cdot I = P + n \cdot i \cdot P$$

da cui si ottengono le relazioni

$$F = P(1 + n \cdot i)$$

$$\frac{F}{P} = 1 + n \cdot i$$

$$P = \frac{F}{1 + n \cdot i}$$

### Capitalizzazione composta

si ha:  $I_1 = i \cdot P$

$$F_1 = P + I = P + i \cdot P = P \cdot (1+i)^1$$

$$F_2 = F_1 + i \cdot F_1 = F_1 \cdot (1+i) = P \cdot (1+i) \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^2$$

$$F_3 = F_2 + i \cdot F_2 = F_2 \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^3$$

.....

$$F_n = F_{n-1} + i \cdot F_{n-1} = F_{n-1} \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^n$$

da cui le relazioni::

$$\boxed{F = P(1+i)^n} \quad \boxed{\frac{F}{P} = (1+i)^n} \quad \boxed{P = \frac{F}{(1+i)^n}}$$

la quantità  $(1+i)^n$  viene chiamata fattore di interesse composto

Calcoli per pagamenti o versamenti in più soluzioni.

### Rendita.

Una somma  $A$  viene depositata ogni fine anno su un conto bancario, ipotizzando un tasso di interesse (costante)  $i$  a capitalizzazione annuale composta, la somma  $F$  che si avrà sul conto dopo  $n$  anni si ricava con la formula

$$F = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Viceversa la relazione che segue permette di conoscere la rata  $A$  che si deve depositare, ogni fine anno, su un conto bancario, se si vuole avere dopo  $n$  anni avere accumulato un capitale pari a  $F$

$$A = F \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

### Ammortamento (Pagamento)

In questo caso si è ottenuto un prestito  $P$ , la rata  $A$ , costante, serve per la restituzione del prestito in  $n$  anni con un tasso di interesse  $i$  costante

$$A = P \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Se si vuole conoscere il prestito  $P$  che è possibile chiedere, conoscendo la rata  $A$  che si desidera versare ogni anno per  $n$  anni con un tasso di interesse annuale costante  $i$  la relazione da utilizzare è:

$$P = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

Esempi:

- 1 Depositando 1000 € in banca, con un interesse costante del 2% a capitalizzazione semplice dopo 15 anni il capitale accumulato sarà:

$$F = P(1 + n \cdot i) = 1000 \cdot (1 + 15 \cdot 2/100) = 1000 \cdot (1 + 15 \cdot 0,02) = 1300 \text{ €}$$

- 2 Avendo ricevuto in prestito 1000€ che dobbiamo restituire dopo 2 anni in una unica soluzione, ci viene chiesta la somma di 1100 €, quale è il tasso di interesse semplice a cui ci è stato concesso il prestito?

Posto: P = 1000 €, F= 1100 €, n=3, dalla relazione relativa alla capitalizzazione semplice si ha:

$$\left(\frac{F}{P} - 1\right) \cdot \frac{1}{n} = \left(\frac{1100}{1000} - 1\right) \cdot \frac{1}{2} = 0,05$$

che corrisponde ad un interesse annuo  $i = 5\%$ .

- 3 Come l'esercizio n 1, ma con calcolo ad interesse composto:

$$F = P(1 + i)^n = 1000 \cdot (1 + 2/100)^{15} = 1000 \cdot (1 + 0,02)^{15} = 1345,87 \text{ €}$$

- 4 Come l'esercizio n 2, ma con calcolo ad interesse composto:

$$\frac{F}{P} = (1 + i)^n \quad \sqrt[n]{\frac{F}{P}} = (1 + i) \quad i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{1100}{1000}} - 1 = 0,0488 = 4,88 \%$$