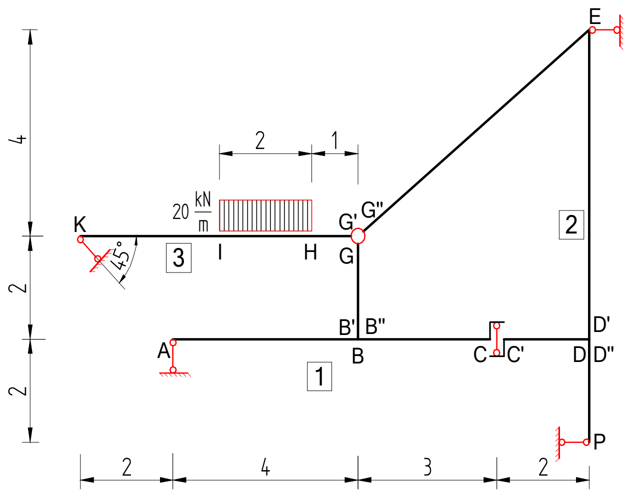
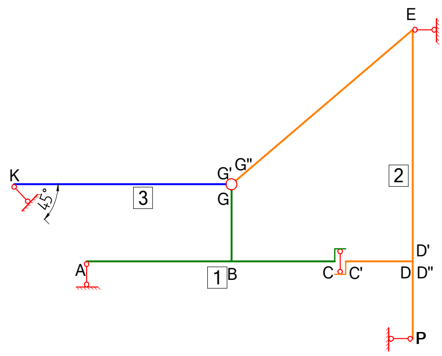
Con riferimento al telaio in figura



si chiede di classificare la struttura (labile, isostatica, iperstatica)



Il telaio è costituito da 3 elementi.
Nella figura a lato sono indicati con i numero 1, 2, 3.
Il primo va dalla sezione A alle sezione C e G', in verde, il secondo dalle sezioni C' e G'' alla sezione P, in arancione, il terzo dalla sezione K alla sezione G' in blue

I gradi di libertà, nel piano, sono quindi: $3 \cdot t = 3 \cdot 3 = 9$ $t=3$

I vincoli presenti sono anche essi 9 infatti: $s = 4 + 4 + 1 = 9$

4 sono dovuti ai 4 pendoli esterni, in A, in K in E, in P.

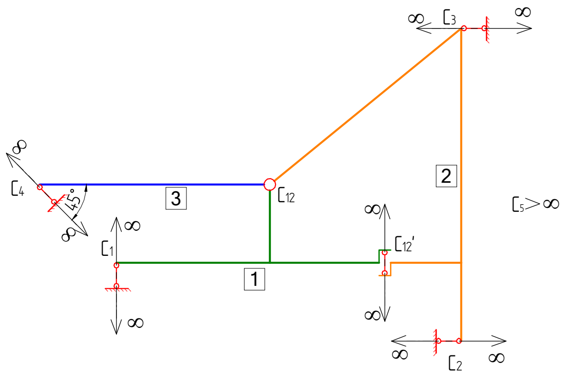
gli altri 5 dai vincoli interni:
la cerniera in G ne elimina $4 = [2(3-1)]$ gradi [cerniera interna vincolo $s=2(n-1)$]
il pendolo in C ne elimina $1 = [2 \cdot 2 - 3]$. [carrello interno $s= (2n-3)$]

Il telaio può essere labile o isostatico

Considerando i singoli tronchi e valutando i soli vincoli esterni i 3 elementi risultano singolarmente labili

L'elemento 1 è vincolato dal solo pendolo in A
L'elemento 2 è vincolato dai pendoli in E e P
L'elemento 3 è vincolato dal solo pendolo in K

Per definire l'isostatica della struttura è necessario verificare se soddisfano o meno i teoremi delle catene cinematiche



<u>Centri Assoluti</u>

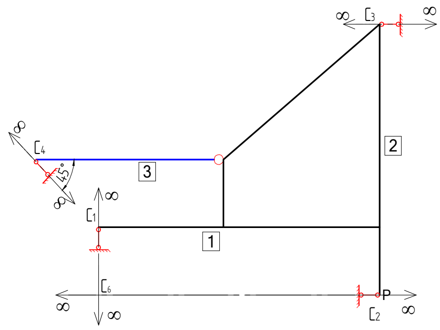
Il centro di rotazione di un pendolo si trova su un asse coincidente con la direzione del pendolo

I pendoli in A,P, E ed K, hanno centro di rotazione C_1, C_2, C_3, C_4 sulle rispettive rette d'azione.

<u>Centri Relativi</u>

Tra gli elementi 1 e 2 c'è un centro relativo C_{12} coincidente con la cerniera che di trova in G ed un altro centro di rotazione $C_{12'}$, si trova sull'asse del pendolo in C

I due centri non potranno mai essere coincidenti per cui gli elementi 1 e 2 sono strettamente connessi, tra essi non potrà essere alcun movimento.



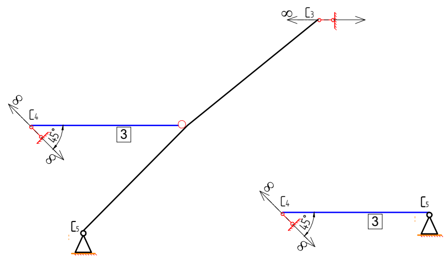
È possibile sostituire i due elementi con uno solo, in nero nella figura a lato.

Su questo elemento agiscono i pendoli in A, P ed E.

Le rette d'azione dei pendoli in A e P si incontrano in un punto del piano dove sarà posizionato il centro assoluto C_6 che sostituisce i centri C_1 e C_2.

I centri C_6 e C_1 non potranno mai coincidere per cui l'elemento è bloccato a terra.

La cerniera in G e collegata al tratto in nero quindi anche essa e non potrà avere alcun movimento



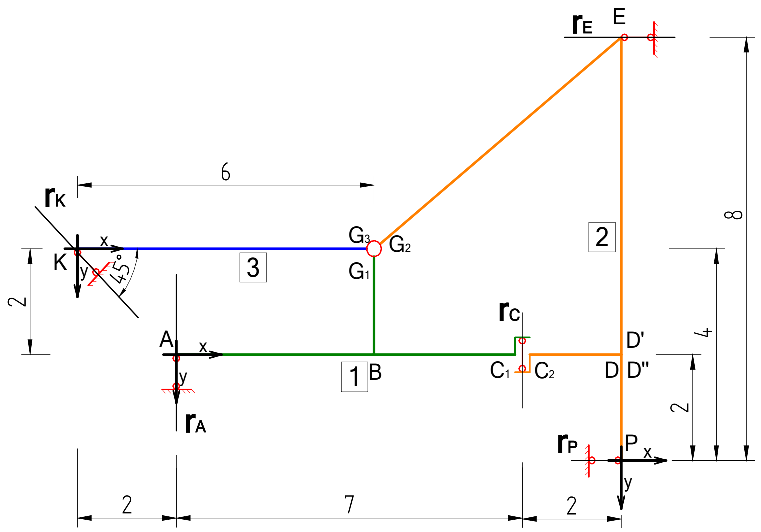
Sull'elemento 3 agisce il pendolo esterno e la cerniera con centri assoluti C_4 e C_5

I due centri non possono coincidere, quindi anche l'elemento 3 non potrà spostarsi.

Non essendo possibile alcun movimento la struttura è isostatica

Calcolo analitico

Si scelgono come polo di riduzione le sezioni A, K , P dove saranno posizionati i sistemi di riferimento x,y.



Il vettore delle variabili è :

$$\boldsymbol{q}=\{u_{1x}(A),\ u_{1y}(A),\ \varphi_1,\ u_{2x}(P),\ u_{2y}(P),\ \varphi_2,\ u_{3x}(K),\ u_{3y}(K),\ \varphi_3\}$$

Nella figura sono rappresentate le rette r_A, r_K, r_P, ,r_E coincidenti con gli assi dei pendoli in A, K, P, E., i punti di applicazione dei carrelli avranno spostamenti lungo queste rette pari a 0

La sezione C_1, di estremità del tronco 1 è collegata con un pendolo alla C_2 di estremità del tronco 2 per cui esse dovranno avere uguali spostamenti lungo l'asse r_C.

La sezione G_1, ,di estremità del tronco 1, è collegata con una cerniera alla G_2 di estremità del tronco 2 ed alla G_3 di estremità del tronco 3 per cui esse dovranno avere spostamenti uguali.

Si potrà quindi scrivere:

Per i carrelli carrelli esterni $u_{rK}(K)=0$ $u_{rA}(A)=0$ $u_{rP}(P)=0$ $u_{rP}(E)=0$

e per la cerniera ed il carrello interni $u(G_1)=u(G_2)=u(G_3)$ $u_{rC}(C_1)=u_{rC}(C_2)$

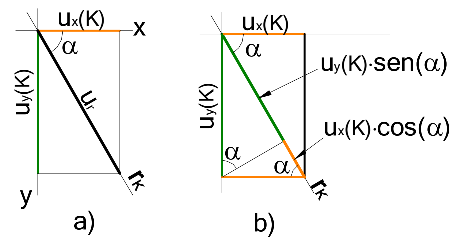
Considerando le componenti sugli assi si ha: $\boxed{u_{1y}(A)=0}$ $\boxed{u_{2x}(P)=0}$ $u_{2x}(E)=0$

$u_{1y}(C_1)=u_{2y}(C_2)$ $u_{1x}(G_1)=u_{2x}(G_2)=u_{3x}(G_3)$ $u_{1y}(G_1)=u_{2y}(G_2)=u_{3y}(G_3)$

Per il carrello in K si ha inclinato di un angolo α si ha $u_{rK}(K)=0$

Dalla analisi della figura a lato si ha:

$$\boxed{u_{rK}(K)=u_{3x}(K)\cos(\alpha)+u_{3y}(K)\,sen(\alpha)=0}$$



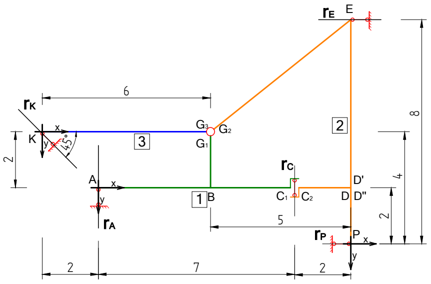
Gli atti di moto relativi ai tre sistemi per un generico punto O sono:

Tronco 1 $u_{1x}(O)=u_{1x}(A)-\varphi_1(y_{1O}-y_{1A})$ $\quad u_{1y}(O)=u_{1y}(A)+\varphi_1(x_{1O}-x_{1A})$

Tronco 2 $u_{2x}(O)=u_{2x}(P)-\varphi_2(y_{2O}-y_{1P})$ $\quad u_{2y}(O)=u_{2y}(P)+\varphi_2(x_{1O}-x_{1P})$

Tronco 3 $u_{3x}(O)=u_{3x}(K)-\varphi_3(y_{3O}-y_{3K})$ $\quad u_{3y}(O)=u_{3y}(K)+\varphi_3(x_{1O}-x_{3K})$

Dalla figura si ricavano le posizione dei punti per i vari sistemi



$x_{1A}=0$ $\quad y_{1A}=0$ $\quad x_{1G1}=4$ $\quad y_{1G1}=-2$ $\quad x_{1C1}=7$ $\quad y_{1C1}=0$

$x_{2P}=0$ $\quad y_{2P}=0$ $\quad x_{2E}=0$ $\quad y_{2E}=-8$

$x_{2G2}=-5$ $\quad y_{2G2}=-4$ $\quad x_{2C2}=-2$ $\quad y_{2C2}=-2$

$x_{3K}=0$ $\quad y_{3K}=0$ $\quad y_{3G_3}=0$ $\quad x_{3G_3}=6$

Per gli spostamenti valgono le relazioni:

Per il pendolo interno $\quad u_{1y}(C_1)=u_{2y}(C_2)$

Per la cerniera interna $\quad u_{1x}(G_1)=u_{2x}(G_2)=u_{3x}(G_3)$ $\quad u_{1y}(G_1)=u_{2y}(G_2)=u_{3y}(G_3)$

Per il tronco 1 si può scrivere

Sezione C_1 $\quad u_{1x}(C_1)=u_{1x}(A)-\varphi_1(y_{1C_1}-y_{1A})$ $\quad u_{1y}(C_1)=u_{1y}(A)+\varphi_1(x_{1C_1}-x_{1A})$

Sezione G_1 $\quad u_{1x}(G_1)=u_{1x}(A)-\varphi_1(y_{1G_1}-y_{1A})$ $\quad u_{1y}(G_1)=u_{1y}(A)+\varphi_1(x_{1G_1}-x_{1A})$

Con le opportune sostituzioni si ottiene

Sezione C_1 $\quad u_{1y}(C_1)=u_{1y}(A)+\varphi_1(x_{1C_1}-x_{1A})=0+\varphi_1(7-0)$ $\quad u_{1y}(C_1)=7\cdot\varphi_1$

Sezione G_1 $\quad u_{1x}(G_1)=u_{1x}(A)-\varphi_1(y_{1G_1}-y_{1A})=u_{1x}(A)-\varphi_1(-2-0)$ $\quad u_{1x}(G_1)=u_{1x}(A)+2\cdot\varphi_1$

$u_{1y}(G_1)=u_{1y}(A)+\varphi_1(x_{1G_1}-x_{1A})=0+\varphi_1(4-0)$ $\quad u_{1y}(G_1)=4\cdot\varphi_1$

Per il tronco 2 si può scrivere

Sezione E $\quad u_{2x}(E)=u_{2x}(P)-\varphi_2(y_{2E}-y_{2P})$ $\quad u_{2y}(E)=u_{2y}(P)+\varphi_2(x_{2E}-x_{2P})$

Sezione G_2 $\quad u_{1x}(G_2)=u_{1x}(P)-\varphi_2(y_{2G_2}-y_{2P})$ $\quad u_{2y}(G_2)=u_{2y}(P)+\varphi_2(x_{2G_2}-x_{2P})$

Sezione C_2 $\quad u_{1x}(C_2)=u_{1x}(P)-\varphi_2(y_{2C_2}-y_{2P})$ $\quad u_{2y}(C_2)=u_{2y}(P)+\varphi_2(x_{2C_2}-x_{2P})$

Con le opportune sostituzioni si ottiene

Sezione E $\quad u_{2x}(E)=u_{2x}(P)-\varphi_2(y_{2E}-y_{2P})$ $\quad 0=0-\varphi_2(-8-0)$ $\quad \boxed{\varphi_2=0}$

$u_{2y}(G_2)=u_{2y}(P)+\varphi_2(x_{2G_2}-x_{2P})=u_{2y}(P)+0\cdot(-5-0)$ $\quad u_{2y}(G_2)=u_{2y}(P)$

Sezione G_2 $\quad u_{2x}(G_2)=u_{2x}(P)-\varphi_2(y_{2G_2}-y_{2P})=0-0\cdot(-4-0)$ $\quad u_{2x}(G_2)=0$

$u_{2y}(G_2)=u_{2y}(P)+\varphi_2(x_{2G_2}-x_{2P})=u_{2y}(P)+0\cdot(-5-0)$ $\quad u_{2y}(G_2)=u_{2y}(P)$

Sezione C2 $u_{2x}(C_2)=u_{2x}(P)-\varphi_2(y_{2C_2}-y_{2P})=0-0\cdot(-2-0)$ $u_{2x}(C_2)=0$

$u_{2y}(C_2)=u_{2y}(P)+\varphi_2(x_{2C_2}-x_{2P})=u_{2y}(P)+0\cdot(-2-0)$ $u_{2y}(C_2)=u_{2y}(P)$

<u>Per il tronco 3 si può scrivere</u>

Sezione G_3 $u_{3x}(G_3)=u_{3x}(K)-\varphi_3(y_{3G_3}-y_{3K})$ $u_{3y}(G_3)=u_{3y}(K)+\varphi_3(x_{3G_3}-x_{3P})$

Con le opportune sostituzioni si ottiene

Sezione G_3 $u_{3x}(G_3)=u_{3x}(K)-\varphi_3(y_{3G_3}-y_{3K})=u_{3x}(K)-\varphi_3\cdot(0-0)$ $u_{3x}(G_3)=u_{3x}(K)$

$u_{3y}(G_3)=u_{3y}(K)+\varphi_3(x_{3G_3}-x_{3P})=u_{3y}(K)+\varphi_3(6-0)$ $u_{3y}(G_3)=u_{3y}(K)+6\cdot\varphi_3$

Considerando le relazioni tra i vari spostamenti

Pendolo interno $u_{1y}(C_1)=u_{2y}(C_2)$ $6\cdot\varphi_1=u_{2y}(P)$ $u_{2y}(P)=6\cdot\varphi_1$

Cerniera Interna $u_{1x}(G_1)=u_{2x}(G_2)=u_{3x}(G_3)$

sostituendo $u_{1x}(A)+2\cdot\varphi_1=0=u_{3x}(K)$ $u_{1x}(A)+2\cdot\varphi_1=0$ $\boxed{u_{3x}(K)=0}$

$u_{1y}(G_1)=u_{2y}(G_2)=u_{3y}(G_3)$

sostituendo $4\cdot\varphi_1=u_{2y}(P)=u_{3y}(K)+6\cdot\varphi_3$ $4\cdot\varphi_1=u_{2y}(P)$ $u_{3y}(K)+4\cdot\varphi_1-6\cdot\varphi_3$

Per il pendolo in K

$u_{3x}(K)\cos(\alpha)+u_{3y}(K)sen(\alpha)=0$ $u_{3y}(K)sen(\alpha)=0$

se il $sen(\alpha)\neq 0$ si ha $\boxed{u_{3y}(K)=0}$

Dalle relazioni $u_{2y}(P)=6\cdot\varphi_1$ $u_{2y}(P)=4\cdot\varphi_1$ si ha $4\cdot\varphi_1=6\cdot\varphi_1$ quindi $\boxed{\varphi_1=0}$

ma $u_{1x}(A)+2\cdot\varphi_1=0$ $\boxed{u_{1x}(A)=0}$

$u_{2y}(P)=6\cdot\varphi_1$ $\boxed{u_{2y}(P)=0}$

$u_{3y}(K)=4\cdot\varphi_1-6\cdot\varphi_3$ $0=4\cdot 0-6\cdot\varphi_3$ $\boxed{\varphi_3=0}$

Tutte le variabili sono nulle per cui lo sono anche tutti i possibili spostamenti, quindi la struttura è isostatica.

Si noti che se si ha $\alpha=0$ anche il seno è nullo quindi non è possibile avere $u_{3y}(K)\neq 0$ la struttura diventa labile

In forma matriciale

$$\boldsymbol{q}=\left\{u_{1x}(A),\ u_{1y}(A),\ \varphi_1,\ u_{2x}(P),\ u_{2y}(P),\ \varphi_2,\ u_{3x}(K),\ u_{3y}(K),\ \varphi_3\right\}$$

le relazioni trovate sono

$$u_{1x}(A)+2\cdot\varphi_1=0$$
$$u_{1y}(A)=0$$
$$u_{2y}(P)-6\cdot\varphi_1=0$$

$$u_{2x}(P)=0$$
$$u_{2y}(P)-4\cdot\varphi_1$$
$$\varphi_2=0$$

$$u_{3x}(K)=0$$
$$u_{3x}(K)\cos(\alpha)+u_{3y}(K)sen(\alpha)=0$$
$$u_{3y}(K)+4\cdot\varphi_1-6\cdot\varphi_3=0$$

Il determinate dei coefficienti è:

u_{1x}	u_{1y}	φ_1	u_{2x}	u_{2y}	φ_2	u_{3x}	u_{3y}	φ_3
1	❑	2	❑	❑	❑	❑	❑	❑
❑	1	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑
❑	❑	-6	❑	1	❑	❑	❑	❑
❑	❑	❑	1	❑	❑	❑	❑	❑
❑	❑	-6	❑	1	❑	❑	❑	❑
❑	❑	❑	❑	❑	1	❑	❑	❑
❑	❑	❑	❑	❑	❑	1	❑	❑
❑	❑	❑	❑	❑	❑	$\cos(\alpha)$	$sen(\alpha)$	❑
❑	❑	4	❑	❑	❑	❑	1	-6

Si ha: $D=36\cdot sen(\alpha)$ che per $\alpha\neq 0$ sarà anche esso diverso da 0, quindi il sistema ammette una sola soluzione che corrisponde a quella banale (tutte le variabili pari a 0)