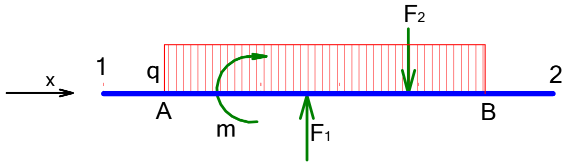
Premessa



Equazioni valide per un tronco di lunghezza finita compresa tra due sezioni A e B di ascisse $x_1 = a$ e $x_2 = b$

$$N(b) - N(a) = -\int_a^b q_t \, dx - \sum_a^b F_t$$

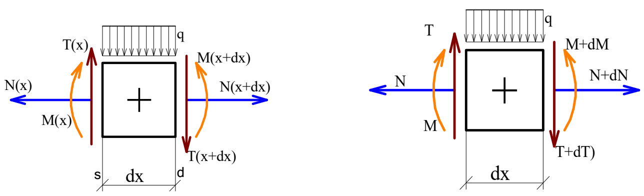
$$T(b) - T(a) = -\int_a^b q_n \, dx - \sum_a^b F_n$$

$$M(b) - M(a) = \int_a^b T \, dx - \sum_a^b m$$

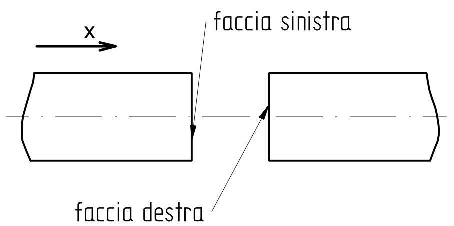
Si considerano positive la azioni come riportate nel concio elementare riportato nelle figure che seguono

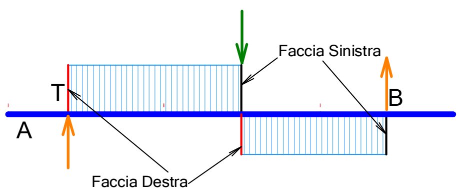
$$\frac{dT}{dx} = -q$$

$$\frac{dM}{dx} = T$$



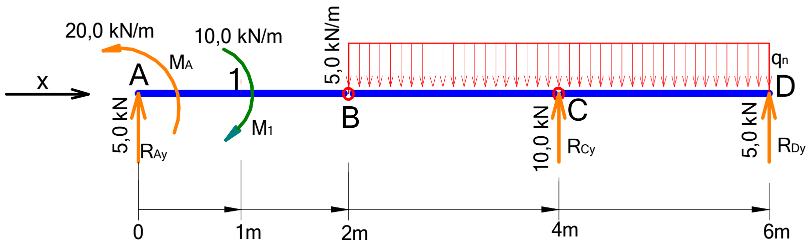
Tagliando un tratto di trave in due tronchi nascono due facce, sinistra e destra,





I grafici riportati faranno riferimento ad una delle due facce secondo lo schema riportato.

Es. 02
Si chiede calcolare le azioni interne: sforzo normale , taglio, momento flettente e disegnare i relativi diagrammi.



~ ° ~

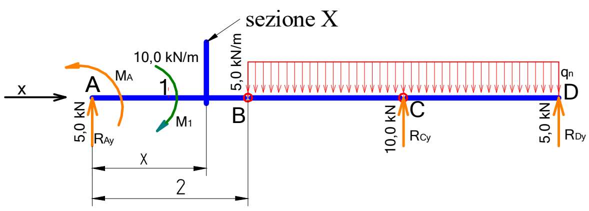
Sforzo normale N

Sulla struttura non agisce nessun carico orizzontale per su cui lo sforzo normale è nullo in ogni sezione

Taglio T

Nella sezione A di ascissa x=0 è applicata la forza $R_{Ay} = 5,0\,[kN]$ si ha: $T_A = R_{Ay} = 5,0\,[kN]$

$0 \le x \le 2$



Considerando una sezione generica X posta ad una ascissa x l'equazione generale del taglio è:

$$T(x) - T(0) = -\int_0^x q_n\,dx - \sum F_n$$

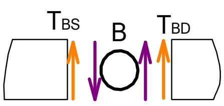
tra x=0 ed x=2 non ci sono né forze concentrate né carichi continui quindi q_n=0 e $\sum F_n = 0$
si ottiene:

$T(x) - T(0) = 0 \;\rightarrow\; T(x) = T(0) = T_A$, il taglio è costante , la sua espressione è: $T(x) = 5\,[kN]$

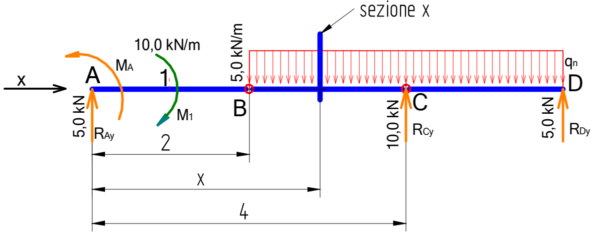
$x=2 \qquad T(2) = T_B = 5\,[kN]$

Il taglio trovato T_{BS} è relativo alla faccia di sinistra ed essendo positivo sarà diretto verso il basso.

Per soddisfare le condizioni di equilibrio della cerniera il taglio T_{BD}, applicato sul lato destro della sezione B sarà diretto verso l'alto e sarà ancora positivo (nel rispetto delle convenzioni sul taglio) come disegnato in figura



$2 \le x \le 4$



In questo tratto è applicato il carico continuo q_n,ma mancano le forze concentrate per cui si ha

$$T(x) - T(2) = -\int_2^x q_n\,dx \qquad T(x) = T(2) - \int_2^x q_n\,dx = T_{BD} - \int_2^x q_n\,dx$$

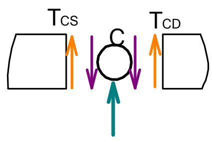
sostituendo i valori

$$T(x) = 5 - \int_2^x 5\,dx = 5 - 5(x-2) = 5 - 5x + 10 \qquad \text{la relazione del taglio è :} \quad T(x) = 15 - 5x$$

per $\quad x = 4 \qquad T(4) = T_C = 15 - 5 \cdot 4 = -5$

il taglio si annulla nella sezione $\quad 0 = 15 - 5x \qquad x = \frac{15}{5} = 5$

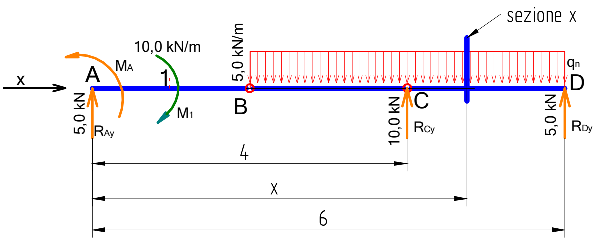
Il taglio T_C è relativo alla faccia di sinistra ed essendo negativo sarà diretto verso l'alto, esso corrisponde al taglio T_{CS} della figura a lato.



Sulla cerniera è applicato la forza R_{cy}, ricordando che vale la relazione $\quad R_{Cy} = T_{CS} + T_{CD} \quad$ si ha $\quad T_{CD} = R_{Cy} - T_{CS} = 10 - 5 = 5\,[kN]$

Il taglio T_{CD} è diretto verso l'alto sarà quindi positivo

$4 \le x \le 6$



Si può ripetere quanto fatto per il tratto BC per cui si ha:

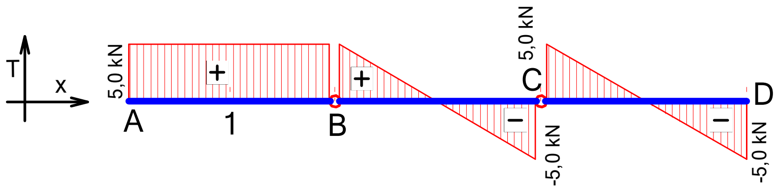
$$T(x) - T(4) = -\int_2^x q_n\,dx \qquad T(x) = T(4) - \int_4^x q_n\,dx = T_{CD} - \int_4^x q_n\,dx$$

$$T(x) = 5 - \int_2^x 5\,dx = 5 - 5(x-4) = 5 - 5x + 20 \qquad \text{la relazione del taglio è :} \quad T(x) = 25 - 5x$$

per $\quad x = 6 \qquad T(6) = T_D = 25 - 5 \cdot 6 = -5\,[kN]$

Il segno negativo indica che il taglio e diretto verso l'alto, per cui si ha $\quad T_D = R_{Dy}$ come ci si aspettava

il taglio si annulla nella sezione $\quad 0 = 25 - 5x \qquad x = \frac{25}{5} = 5$



Momento

Nella sezione A è applicato un momento M_A = - 20 [kNm] (negativo in base alle convenzioni adottate)

$0 \le x \le 1$

si ha $\qquad M(x) - M(0) = \int_0^x T_x\,dx \qquad M(x) = M(0) + \int_0^x T_x\,dx$

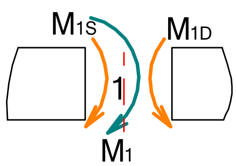
in $\quad x = 0 \quad$ il momento è M_A e ricordando la relazione di T(x) in questo intervallo si ha:

$$M(x) = M_A + \int_0^x T_x\,dx = -20 + \int_0^x 5\,dx = -20 + 5 \cdot (x - 0) \qquad \text{l'espressione del momento è:} \quad M(x) = -20 + 5x$$

per $\quad x = 1 \quad$ si ha $\quad M(1) = M_1 = -20 + 5 \cdot 1 = -15\,[kNm]$

La sezione 1 è in equilibrio per cui si deve avere

$\sum M = 0 \qquad M_1 = M_{1S} - M_{1D} = 0$



da cui

$M_{1D} = M_{1S} - M_1 = 15 - 5 = 5\,[kNm]$ esso comunque sarà considerato negativo in base alla convenzioni adottate

$1 \le x \le 2$

la relazione del momento è $\qquad M(x) - M(1) = \int_1^x T(x)\,dx$, con le opportune sostituzioni si ottiene

$$M(x) = M_{1D} + \int_1^x T_x\,dx = -5 + \int_0^x 5\,dx = -5 + 5 \cdot (x - 0) \qquad \text{l'espressione è:} \quad M(x) = -5 + 5x$$

per $x=2$ si ha $M(2)=M_B=-5+5\cdot 1=0\,[kNm]$

$2\le x\le 4$

$$M(x)-M(2)=\int_2^x T_x\,dx \qquad M(x)=\int_2^x T_x\,dx$$

ricordando la relazione trovata in precedenza $T(x)=15-5x$ e sostituendola nell'integrale

$$M(x)=\int_2^x (15-5x)\,dx=(15x-\frac{5}{2}x^2)\Big|_2^x=(15x-\frac{5}{2}x^2)-(15\cdot 2-\frac{5}{2}\cdot 2^2)$$

l'espressione è $M(x)=-20+15x-\frac{5}{2}x^2$

per $x=2$ si ha $M(2)=M_B=-20+15\cdot 2-\frac{5}{2}\cdot 2^2=0$

per $x=4$ si ha $M(4)=M_C=-20+15\cdot 4-\frac{5}{2}\cdot 4^2=-20+60-40=0$

per $x=3$ si ha $M(3)=M_2=-20+15\cdot 3-\frac{5}{2}3^2=2{,}5\,[kNm]$

$4\le x\le 6$

Seguendo un procedimento analogo si ottiene

$$M(x)-M(4)=\int_4^x T_x\,dx \qquad M(x)=\int_4^x T(x)\,dx$$ vale la relazione $T(x)=25-5x$ e sostituendo

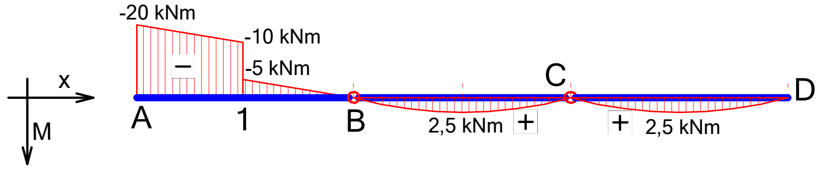
$$M(x)=\int_4^x (25-5x)\,dx=(25x-\frac{5}{2}x^2)\Big|_4^x=(25x-\frac{5}{2}x^2)-(25\cdot 4-\frac{5}{2}\cdot 4^2)$$

l'espressione è $M(x)=-60+25x-\frac{5}{2}x^2$

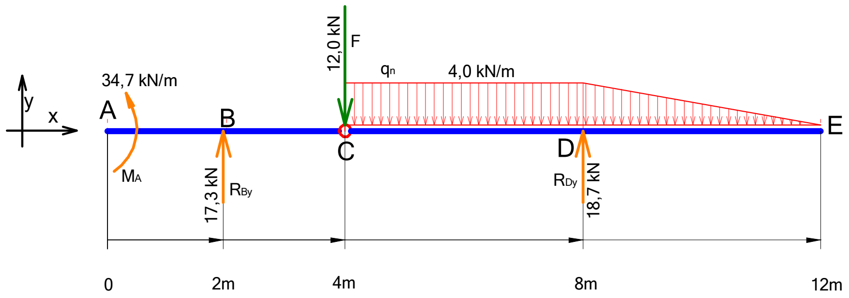
per $x=4$ si ha $M(4)=M_B=-60+15\cdot 4-\frac{5}{2}\cdot 4^2=0$

per $x=6$ si ha $M(6)=M_C=-60+15\cdot 6-\frac{5}{2}\cdot 6^2=-20+60-40=0$

per $x=5$ si ha $M(5)=M_3=-60+15\cdot 5-\frac{5}{2}5^2=2{,}5\,[kNm]$ momento massimo



Es. 03
Si chiede calcolare le azioni interne: sforzo normale , taglio, momento flettente e disegnare i relativi diagrammi delle azioni interne.



~ ° ~

Non essendo applicato nessun carico agente lungo l’asse della struttura gli sforzi Normali sono nulli

Taglio

Nella sezione A di ascissa x=0 non è applicata alcuna forza per cui T_A= 0 [kN]

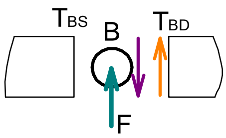
$0 \leq x \leq 2$

Tra le sezioni A e B non ci sono carichi, si ha q_n=0 e $\sum F=0$

$$T(x)-T(0)=-\int_0^x q\,dx=0 \qquad T(x)=T_A=0\,[kN]$$

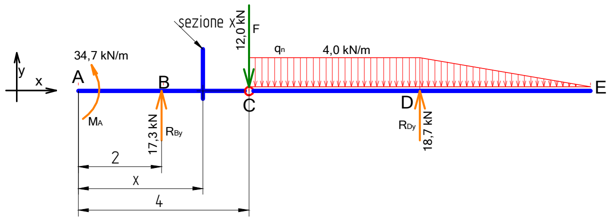
per $\quad x=2 \qquad T(2)=T_B=0$

Nella sezione B è stato ricavato che il taglio agente sulla faccia sinistra è nullo, in questa sezione si trova la reazione $R_{By}=17{,}3\,[kN]$
dalla relazione $F=T_{BS}+T_{BD}$ si ottiene $T_{BD}=17{,}3\,[kN]$



Si ha $T(2)_S=T_{BD}=17{,}3\,[kN]$

$2 \leq x \leq 4$

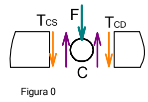


La relazione del taglio è $T(x)-T(2)=-\int_2^x q_{dx}$

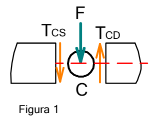
in questo tratto $q_n = 0$ per cui

$$T(x) = T(2) - \int_2^x q_n\, dx = 17{,}3 + 0\, [kN] \quad \text{il taglio è costante e sarà:} \quad T(x) = 17{,}3\, [kN]$$

in $x = 4$ si ha $T(4) = T_C = 17{,}3\, [kN]$

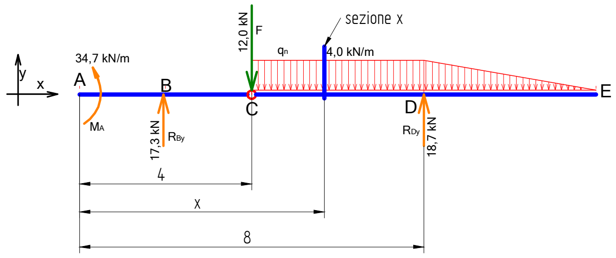


Il taglio T_C è relativo alla faccia di sinistra ed essendo positivo è diretto verso il basso, esso corrisponde al taglio T_{CS} della figura a lato.
Sulla cerniera è applicato la forza F, vale la relazione $F = T_{CS} + T_{CD}$
con riferimento alla figura 0 si ha $T_{CD} = F - T_{CS} = 12 - 17{,}3 = -5{,}3\, [kN]$



Il segno negativo indica che il verso della T_{CD} deve essere cambiato esso è quindi diretto verso l'alto, per la convenzione sui segni T_{CD} sarà positivo.

$4 \le x \le 8$



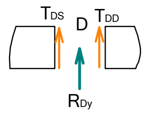
In questo tratto è applicato il carico continuo q_n, non ci sono forze concentrate per cui si ha

$$T(x) - T(4) = -\int_4^x q_n\, dx \qquad T(x) = T(4) - \int_4^x q_n\, dx = T_{CD} - \int_4^x q_n\, dx$$

con le opportune sostituzioni si ha:

$$T(x) = 5{,}3 - \int_4^x 4\, dx = 5{,}3 - 4(x-4) = 5{,}3 - 4x + 16 \qquad \text{l'espressione è:} \quad T(x) = 21{,}3 - 4x$$

per $x = 8$ si ha $T(8) = T_D = 21{,}3 - 4 \cdot 8 = -10{,}7\, [kN]$



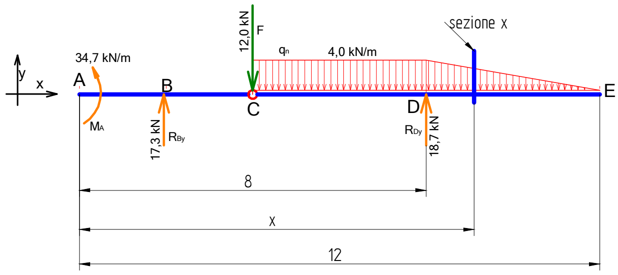
Il taglio T_D è relativo alla faccia di sinistra ed essendo negativo sarà diretto verso l'alto, esso corrisponde al taglio T_{DS} della figura a lato.
Nella sezione è applicato la forza R_{Dy}, ricordando che vale la relazione

$R_{Dy} = T_{DS} + T_{DD}$ si ha $T_{DD} = R_{Dy} - T_{DS} = 18{,}7 - 10{,}7 = 8\, [kN]$

Il taglio T_{CD} è diretto verso l'alto sarà quindi positivo

si ha: $T(8)_D = T_{DD} = 8\, [kN]$

$8 \leq x \leq 12$



Il carico q_n variabile linearmente che assume valore 4 per x = 8 e valore 0 per x = 12.

Il suo andamento è lineare e può essere rappresentato come una retta di equazione: $q_x = mx + n$

Sostituendo i valori trovati si ricavano *m* ed *n*: $\begin{matrix} 0 = m \cdot 12 + n \\ 4 = m \cdot 8 + n \end{matrix}$

risolvendo si ottiene m = -1 ed n = 12 quindi: $q_x = -x + 12$

l'espressione del taglio è $T(x) - T(8) = -\int_8^x q_n \, dx$ $\quad T(x) = T(8) - \int_8^x q_x \, dx$

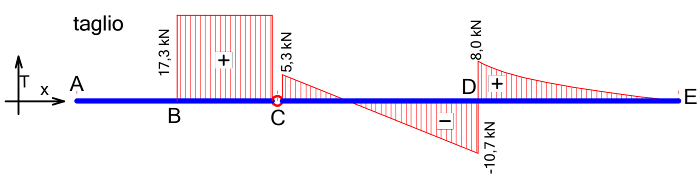
sostituendo la relazione trovata di q_x:

$$T(x) = T(8) - \int_8^x (-x+12)\, dx = 8 - \left(-\frac{x^2}{2} + 12 \cdot x\right)\Bigg|_8^x \; = 8 + \frac{x^2}{2} - 12 \cdot x - \frac{8^2}{2} + 12 \cdot 8$$

l'espressione del taglio è $\qquad T(x) = 72 - 12\, x + \frac{x^2}{2}$

per $\quad x = 8 \qquad T(8) = T_D = 72 - 12 \cdot 8 + \frac{8^2}{2} = 8\,[kN]$

per $\quad x = 12 \qquad T(12) = T_E = 72 - 12 \cdot 12 + \frac{12^2}{2} = 0\,[kN]$



Momento

In x =0 agisce il momento M_A = 34,7 [kNm] si ha: $M(0)=M_A=-34{,}7\,[kNm]$ (negativo in base alle convenzioni adottate)

$0 \le x \le 2$

La relazione diventa: $M(x)-M(0)=\int_0^x T(x)\,dx$

nell'intervallo[0,2] $T(x)=0$

si ottiene $M(x)=M(0)+0\cdot x=-34{,}7\,[kNm]$ il momento è costante e vale $M(x)=-34{,}7\,[kNm]$

per $x=2$ $M(2)=M_B=-34{,}7\,[kNm]$

$2 \le x \le 4$

il taglio è $T(x)=17{,}3\,[kN]$

$$M(x)-M(2)=\int_2^x T(x)\,dx \qquad M(x)=M(2)+\int_2^x T(x)\cdot dx=-34{,}7+17{,}34\cdot(x-2)$$

l'espressione è: $M(x)=-69{,}4+17{,}34\cdot x$

in $x=4$ $M(4)=M_C=-69{,}4+17{,}34\cdot 4=0\,[kNm]$

$4 \le x \le 8$

$$T(x)=21{,}3-4\,x$$

$$M(x)-M(4)=\int_4^x T(x)\,dx \qquad M(x)=M(2)+\int_4^x (21{,}3-4\,x)\,dx_C=0+\left.\left(21{,}3\cdot x-4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\right|_4^x$$

$$M(x)=\left(21{,}3\cdot x-4\cdot\frac{x^2}{2}\right)-\left(21{,}3\cdot 4-4\cdot\frac{4^2}{2}\right) \qquad M(x)=-53{,}2+21{,}3\cdot x-2\cdot x^2$$

in $x=4$ $M(4)=M_C=-53{,}2+21{,}3\cdot 4-2\cdot 4^2=0\,[kNm]$

in $x=8$ $M(8)=M_D=-53{,}2+21{,}3\cdot 8-2\cdot 8^2=-10{,}8\,[kNm]$

$8 \le x \le 12$

$$T(x)=72-12\,x+\frac{x^2}{2}$$

$$M(x)-M(8)=\int_8^x T(x)\,dx \qquad M(x)=M(8)+\int_8^x T(x)\,dx=M(8)+\int_8^x \left(72-12\,x+\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$M(x) = -10{,}8 + \left(72 \cdot x - 12 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_8^x \qquad M(x) = \left(72 \cdot x - 12 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\right) - \left(72 \cdot 8 - 12 \cdot \frac{8^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8^3}{3}\right) - 10{,}8$$

$$M(x) = 72 \cdot x - 6 \cdot x^2 + \frac{x^3}{6} - 288{,}1$$

in $x = 8$ $\quad M(x) = M_D = 72 \cdot 8 - 6 \cdot 8^2 + \frac{8^3}{6} - 288{,}1 = -10{,}8$

in $x = 12$ $\quad M(12) = M_E = 72 \cdot 12 - 6 \cdot 12^2 + \frac{12^3}{6} - 288{,}1 = 0$