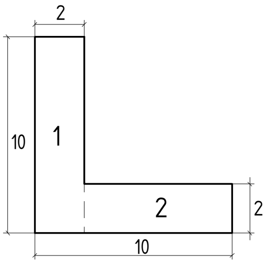
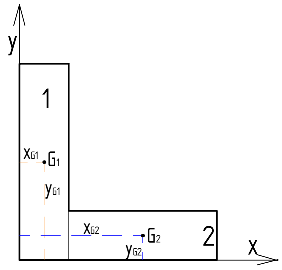
Es 01
Calcolare: Posizione baricentro , momenti inerzia, assi principali .





Si divide la figura i due rettangoli (1 , 2) aventi dimensioni
$h_1 = 10\ cm \quad b_1 = 2\ cm \quad h_2 = 2\ cm \quad b_2 = 8\ cm$

le figure avranno aree $A_1 = b_1 \cdot h_1 = 2 \cdot 10 = 20\ cm^2 \quad A_2 = b_2 \cdot h_2 = 8 \cdot 2 = 16\ cm^2$

la superficie totale è $A_t = A_1 + A_2 = 20 + 16 = 36\ cm^2$

I baricentri si troveranno agli incroci delle rispettive diagonali:

$$x_{G1} = \frac{b_1}{2} = \frac{2}{2} = 1\ cm \qquad y_{G1} = \frac{h_1}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm$$
$$x_{G2} = b_1 + \frac{b_2}{2} = 2 + \frac{8}{2} = 6\ cm \qquad y_{G2} = \frac{h_2}{2} = \frac{2}{2} = 1\ cm$$

Il baricentro della figura avrà coordinate:

$$x_G = \frac{A_1 \cdot x_{G1} + A_2 \cdot x_{G2}}{A_t} = \frac{20 \cdot 1 + 16 \cdot 6}{36} = 3{,}22\ cm$$
$$y_G = \frac{A_1 \cdot y_{G1} + A_2 \cdot y_{G2}}{A_t} = \frac{20 \cdot 5 + 16 \cdot 1}{36} = 3{,}22\ cm$$

I momenti di inerzia rispetto agli assi x ed y si calcolano mediante il teorema del trasporto

La formula generale $I_{xG} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_{YG} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_x = I_{xG} + A \cdot d_y^2 \quad I_y = I_{yG} + A \cdot d_x^2$

si ha:

per il rettangolo 1
$$I_{1x} = I_{1xG1} + A_1 \cdot y_{G1}^2 = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + A_1 \cdot y_{G1}^2 = \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 20 \cdot 5^2 = 666{,}67\ cm^4$$
$$I_{1y} = I_{1yG1} + A_1 \cdot x_1^2 = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} + A_1 \cdot x_{G1}^2 = \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 1^2 = 26{,}67\ cm^4$$

per il rettangolo 2
$$I_{2x} = I_{2xG2} + A_2 \cdot y_2^2 = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + A_2 \cdot y_{G2}^2 = \frac{8 \cdot 2^3}{12} + 16 \cdot 1^2 = 21{,}33\ cm^4$$
$$I_{2y} = I_{2yG2} + A_2 \cdot x_2^2 = \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} + A_2 \cdot x_{G2}^2 = \frac{2 \cdot 8^3}{12} + 16 \cdot 6^2 = 661{,}33\ cm^4$$

Per il calcolo dei momenti centrifughi rispetto agli assi x-y si ricorda che $I_{1xyG1} = 0$ e $I_{2xyG2} = 0$ in quanto gli assi, paralleli agli assi x e y e passanti per i baricentri, sono assi centrali di inerzia.

$$I_{1\,xy}=I_{1\,xyG\,1}+A_1\cdot x_{G\,1}\cdot y_{G\,1}=0+20\cdot 1\cdot 5=100\ cm^4 \qquad I_{2\,xy}=I_{2\,xyG\,2}+A_2\cdot x_{G\,2}\cdot y_{G\,2}=0+16\cdot 6\cdot 1=96\ cm^4$$

Ricordando la proprietà additiva dei momenti di inerzia si calcola il momento della figura completa rispetto agli assi. x-y

$$I_{tx}=I_{1\,x}+I_{2\,x}=666{,}67+21{,}33=688\ cm^4$$
$$I_{ty}=I_{1\,y}+I_{2\,y}=26{,}67+661{,}33=688\ cm^4$$
$$I_{txy}=I_{1\,xy}+I_{2\,xy}=100+96=196\ cm^4$$

Utilizzando il teorema del trasporto si calcolano i momenti rispetto agli assi paralleli ad x-y passanti per baricentro della figura.

$$I_{txG}=I_{tx}-A_t\cdot y_G^2=688-36\cdot 3{,}22^2=314{,}22\ cm^4$$
$$I_{tyG}=I_{ty}-A_t\cdot x_G^2=688-36\cdot 3{,}22^2=314{,}22\ cm^4$$
$$I_{txGyG}=I_{txy}-A_t\cdot x_G\cdot y_g=196-33{,}22\cdot 3{,}22=-177{,}78\ cm^4$$

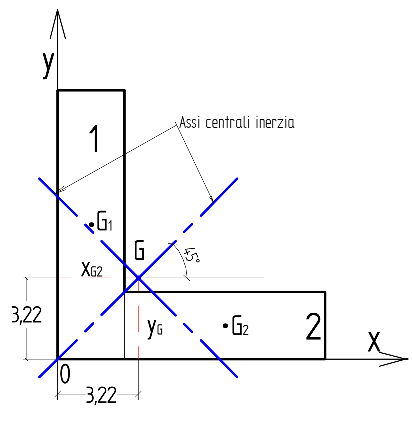
Si calcolano i momenti massimo e minimo rispetto agli assi principali passanti per il punto 0, origine degli assi x-y e rispetto agli assi centrali passanti per il G baricentro della figura

$$I_{0\,max}=\frac{I_{tx}+I_{ty}}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_{tx}-I_{ty}}{2}\right)^2+I_{txy}^2}=\frac{688+688}{2}+\sqrt{\left(\frac{688-688}{2}\right)^2+196^2}=884\ cm^4$$
$$I_{0\,min}=\frac{I_{tx}+I_{ty}}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_{tx}-I_{ty}}{2}\right)^2+I_{txy}^2}=\frac{688+688}{2}-\sqrt{\left(\frac{688-688}{2}\right)^2+196^2}=492\ cm^4$$

$$I_{Gmax}=\frac{I_{txG}+I_{tyG}}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_{txG}-I_{tyG}}{2}\right)^2+I_{txGyG}^2}=\frac{314{,}22+314{,}22}{2}+\sqrt{\left(\frac{314{,}22-314{,}22}{2}\right)^2+(-177{,}78)^2}=492\ cm^4$$
$$I_{Gmin}=\frac{I_{txG}+I_{tyG}}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_{txG}-I_{tyG}}{2}\right)^2+I_{txGyG}^2}=\frac{314{,}22+314{,}22}{2}-\sqrt{\left(\frac{314{,}22-314{,}22}{2}\right)^2+(-177{,}78)^2}=136{,}44\ cm^4$$

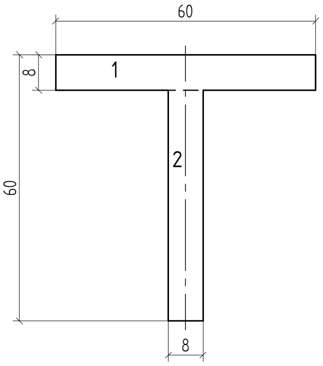
$$\alpha_{0\,G}=\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{2\cdot I_{txGyG}}{I_{txG}-I_{tyG}}\right)=\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{2\cdot(-177{,}78)}{314{,}22-314{,}22}\right)=-45\ °$$

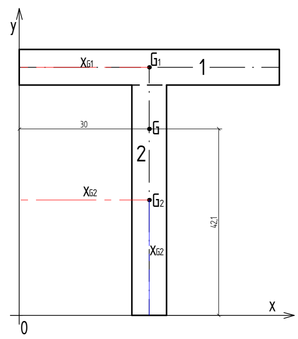
$$\alpha_{00}=\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{2\cdot I_{txy}}{I_{tx}-I_{ty}}\right)=\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{2\cdot 196}{314{,}22-314{,}22}\right)=45\ °$$



Es 02

Calcolare: Posizione baricentro , momenti inerzia, assi principali di inerzia





Si divide la figura i due rettangoli (1 , 2) aventi dimensioni

$h_1 = 8\ mm \qquad b_1 = 60\ mm \qquad h_2 = 58\ mm \qquad b_2 = 8\ mm$

le figure avranno aree $A_1 = b_1 \cdot h_1 = 60 \cdot 8 = 480\ mm^2 \qquad A_2 = b_2 \cdot h_2 = 8 \cdot 52 = 416\ cm^2$

la superficie totale è $A_t = A_1 + A_2 = 480 + 416 = 896\ mm^2$

I baricentri si troveranno agli incroci delle rispettive diagonali con coordinate

$$x_{G1} = \frac{b_1}{60} = \frac{2}{2} = 30\ mm \qquad y_{G1} = h_2 + \frac{h_1}{2} = 52 + \frac{8}{2} = 56\ mm$$

$$x_{G2} = b_0 + \frac{b_2}{2} = 26 + \frac{8}{2} = 30\ mm \qquad y_{G2} = \frac{h_2}{2} = \frac{52}{2} = 26\ mm$$

Il baricentro della figura avrà coordinate:

$$x_G = \frac{A_1 \cdot x_{G1} + A_2 \cdot x_{G2}}{A_t} = \frac{480 \cdot 30 + 416 \cdot 30}{896} = 30\ mm$$

$$y_G = \frac{A_1 \cdot y_{G1} + A_2 \cdot y_{G2}}{A_t} = \frac{480 \cdot 56 + 416 \cdot 26}{816} = 42{,}07\ mm$$

I momenti di inerzia rispetto agli assi x ed y si calcolano mediante il teorema del trasporto

La formula generale $I_{xG} = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad I_{YG} = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad I_x = I_{xG} + A \cdot d_y^2 \qquad I_y = I_{yG} + A \cdot d_x^2$

si ha:

per il rettangolo 1

$$I_{1x} = I_{1xG1} + A_1 \cdot y_{G1}^2 = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + A_1 \cdot y_{G1}^2 = \frac{60 \cdot 8^3}{12} + 480 \cdot 56^2 = 1507840\ mm^4$$

$$I_{1y} = I_{1yG1} + A_1 \cdot x_1^2 = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} + A_1 \cdot x_{G1}^2 = \frac{8 \cdot 60^3}{12} + 480 \cdot 30^2 = 576000\ mm^4$$

per il rettangolo 2

$$I_{2x} = I_{2xG2} + A_2 \cdot y_2^2 = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + A_2 \cdot y_{G2}^2 = \frac{8 \cdot 52^3}{12} + 416 \cdot 26^2 = 374954{,}67\ mm^4$$

$$I_{2y} = I_{2yG2} + A_2 \cdot x_2^2 = \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} + A_2 \cdot x_{G2}^2 = \frac{52 \cdot 8^3}{12} + 416 \cdot 30^2 = 376618{,}67\ mm^4$$

Per il calcolo dei momenti centrifughi rispetto agli assi x-y si ricorda che $I_{1\,xyG1}=0$ e $I_{2\,xyG2}=0$ in quanto gli assi, paralleli agli assi x e y e passanti per i baricentri, sono assi centrali di inerzia.

$$I_{1\,xy}=I_{1\,xyG1}+A_1\cdot x_{G1}\cdot y_{G1}=0+480\cdot 30\cdot 56=8{,}06\cdot 10^5\ mm^4$$
$$I_{2\,xy}=I_{2\,xyG2}+A_2\cdot x_{G2}\cdot y_{G2}=0+416\cdot 30\cdot 26=3{,}24\cdot 10^5\ mm^4$$

Ricordando la proprietà additiva dei momenti di inerzia si calcolano i momenti della figura completa rispetto agli assi x-y

$$I_{tx}=I_{1\,x}+I_{2\,x}=1507840+374955=1{,}88\cdot 10^6\ mm^4$$
$$I_{ty}=I_{1\,y}+I_{2\,y}=576000+376619=9{,}53\cdot 10^5\ mm^4$$
$$I_{txy}=I_{1\,xy}+I_{2\,xy}=8{,}06\cdot 10^5+3{,}24\cdot 10^5=1{,}13\cdot 10^6\ mm^4$$

Rispetto agli assi paralleli ad x-y passanti per il G baricentro della figura

$$I_{txG}=I_{tx}-A_t\cdot y_G^2=1{,}88\cdot 10^6-896\cdot 42{,}07=296870{,}1\ mm^4$$
$$I_{tyG}=I_{ty}-A_t\cdot x_G^2=9{,}53\cdot 10^5-896\cdot 30^2=146218\ mm^4$$
$$I_{txGyG}=I_{txy}-A_t\cdot x_G\cdot y_g=1{,}13\cdot 10^6-896\cdot 30\cdot 42{,}07=0\ cm^4$$

Si calcolano i momenti massimo e minimo rispetto agli assi principali passanti per il punto 0, origine degli assi x-y e rispetto agli assi centrali passanti per il G baricentro della figura

$$I_{0\,max}=\frac{I_{tx}+I_{ty}}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_{tx}-I_{ty}}{2}\right)^2+I_{txy}^2}=\frac{1{,}88\cdot 10^6+9{,}53\cdot 10^5}{2}+\sqrt{\left(\frac{1{,}88\cdot 10^6-9{,}53\cdot 10^5}{2}\right)^2+\left(1{,}13\cdot 10^6\right)^2}=2{,}06\cdot 10^6\ cm^4$$
$$I_{0\,min}=\frac{I_{tx}+I_{ty}}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_{tx}-I_{ty}}{2}\right)^2+I_{txy}^2}=\frac{1{,}88\cdot 10^6+9{,}53\cdot 10^5}{2}-\sqrt{\left(\frac{1{,}88\cdot 10^6-9{,}53\cdot 10^5}{2}\right)^2+\left(1{,}13\cdot 10^6\right)^2}=1{,}95\cdot 10^5\ cm^4$$

$$I_{Gmax}=\frac{I_{txG}+I_{tyG}}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_{txG}-I_{tyG}}{2}\right)^2+I_{txGyG}^2}=\frac{296870{,}1+146218{,}7}{2}+\sqrt{\left(\frac{296870{,}1+146218{,}7}{2}\right)^2+(0)^2}=296870{,}1\ mm^4$$
$$I_{Gmin}=\frac{I_{txG}+I_{tyG}}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_{txG}-I_{tyG}}{2}\right)^2+I_{txGyG}^2}=\frac{296870{,}1+146218{,}7}{2}-\sqrt{\left(\frac{296870{,}1-146218{,}7}{2}\right)^2+(0)^2}=146218{,}7\ mm^4$$

$$\alpha_{0\,G}=\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{2\cdot I_{txGyG}}{I_{txG}-I_{tyG}}\right)=\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{2\cdot(0)}{296870{,}1-146218{,}7}\right)=0\ °$$

$$\alpha_{00}=\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{2\cdot I_{txy}}{I_{tx}-I_{ty}}\right)=\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{2\cdot 1{,}1309\cdot 10^6}{1{,}8828\cdot 10^6-146218{,}7\cdot 10^5}\right)=-33{,}82\ °$$