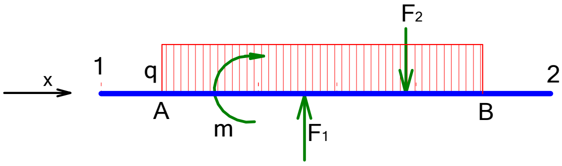
Premessa



Equazioni valide per un tronco di lunghezza finita compresa tra due sezioni A e B di ascisse $x_1 = a$ e $x_2 = b$

$$N(b) - N(a) = -\int_a^b q_t\, dx - \sum_a^b F_t$$

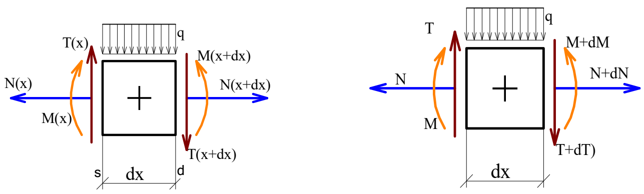
$$T(b) - T(a) = -\int_a^b q_n\, dx - \sum_a^b F_n$$

$$M(b) - M(a) = \int_a^b T\, dx - \sum_a^b m$$

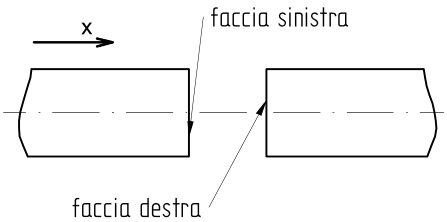
Si considerano positive le azioni come visualizzate nel concio elementare delle figure che seguono

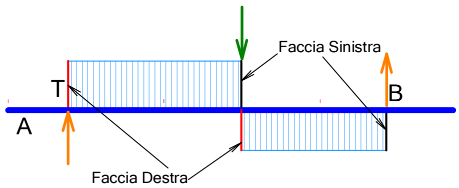
$$\frac{dT}{dx} = -q$$

$$\frac{dM}{dx} = T$$



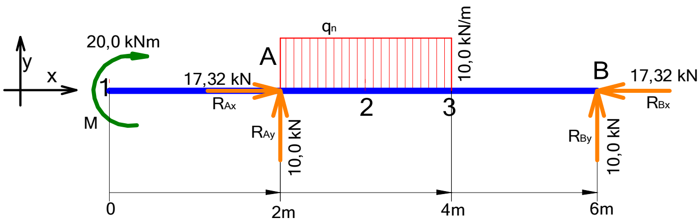
Tagliando un tratto di trave in due tronchi nascono due facce, sinistra e destra,





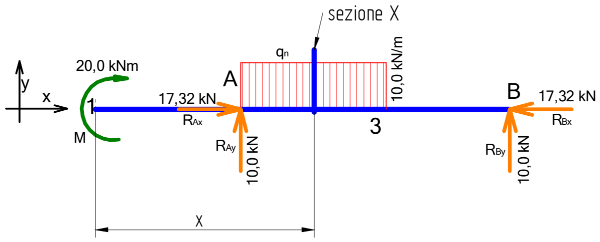
I grafici riportati faranno riferimento ad una delle due facce secondo lo schema riportato.

Es. 01
Si chiede calcolare le azioni interne: sforzo normale , taglio, momento flettente e disegnare i relativi diagrammi.



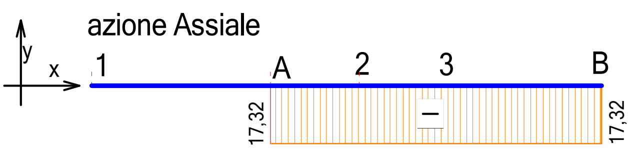
~ o ~

Nei vari passi dell'esercizio si farà riferimento ad una generica sezione X, con ascissa x, interna all'intervallo considerato



Sforzo Normale N

Uno sforzo normale, costante, di compressione, agisce tra le sezioni A (x=2) e B (x=6) esso sarà negativo con valore $N = -17{,}32\,[kN]$



Taglio

Vale la relazione $\frac{dT}{dx} = -q_n$ integrando si ha $T = -\int q_n\,dx$

$0 \leq x \leq 2$

non è applicato nessun carico continuo, per cui q_n =0, integrando si ha $T(x) = C$

nella sezione x=0 il taglio è nullo per cui $T(x) = 0$

$2 \leq x \leq 4$

è applicato un carico costante q_n = 10 [kN/m] , integrando si ottiene

$$T(x) = q_n(x-2) + C_1$$

è necessario valutare C_1

Nella sezione A di ascissa x=2 agisce R_{Ay} , diretta verso l'alto, il taglio è positivo e vale $T_A = 10\,[kN]$

si ha $T(2) = -q_n(2-2) + C_1 = T_A$ $\qquad C_1 = T_A = 10$

sostituendo C_1 si ottiene $T(x) = -10\,(x-2) + 10$ da cui $\qquad T(x) = -10\,x + 30$

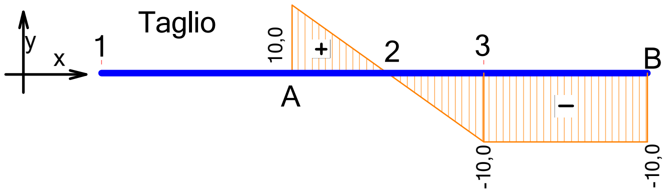
in $x = 4 \qquad T(4) = T_3 = -10\,4 + 30 = -10\,[kN]$

è facile ricavare che il taglio assume valore nullo per x=3

$4 \le x \le 6$

il carico continuo q_n è nullo, il taglio è costante ed è $\qquad T(x) = -10$

in $x = 6 \qquad T(6) = T_B = -10$



Momento flettente

vale la relazione $\dfrac{dM}{dx} = T$ integrando $M = \int T dx$

$0 \le x \le 2$

il taglio T è costante ed è 0, integrando si ottiene $M(x) = T \cdot x + C_2 \qquad M(x) = 0 \cdot x + C_2 = C_2$

per conoscere il valori di C_2 si valuta il momento nella sezione x=0, dove è applicato il momento

$M = 20\,[kNm]$ per cui $M_1 = M = 20\,[kNm]$ (considerato positivo in base alla convenzione adottata)

si ha

$M(0) = M_1 \;\rightarrow\; M(0) = C_2 \;\rightarrow\; C_2 = M_1 = 20\,[kNm]$ quindi $\qquad M(x) = 20\,[kNm]$

in $x = 2 \qquad M(2) = M_A = 20\,[kNm]$

$2 \le x \le 4$

il taglio è variabile con equazione $T(x) = -10\,x + 30$ quindi $\dfrac{dM}{dx} = -10\,x + 30$

integrando $M(x) = -\dfrac{10}{2}x^2 + 30 \cdot x + C_3$

per calcolare C_3 si valuta il momento nella sezione di ascissa x=2

$$M(2) = -\frac{10}{2}2^2 + 30 \cdot 2 + C_3 = M_A \qquad C_3 = M_A + \frac{10}{2}2^2 - 30 \cdot 2 = 20 + \frac{10}{2}2^2 - 30 \cdot 2 = -20$$

l’equazione del momento è: $M(x) = -\frac{10}{2}x^2 + 30 \cdot x - 20$

in $x = 4$ $\quad M(4) = M_3 = -\frac{10}{2}4^2 + 30 \cdot 4 - 20 = 20$

in $x = 3$ $\quad M(3) = M_{max} = -\frac{10}{2}3^2 + 30 \cdot 3 - 20 = 25$

$4 \leq x \leq 6$

il taglio è costante $\frac{dM}{dx} = -10$ quindi $M(x) = -10 \cdot x + C_4$

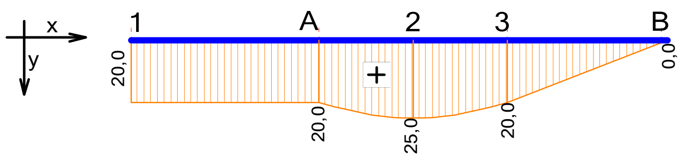
si ricava C_4 valutando il momento nella sezione di ascissa x=4

$$M(4) = -10 \cdot 4 + C_4 = M_3 \qquad C_4 = M_3 + 10 \cdot 4 = 20 + 40 = 60$$

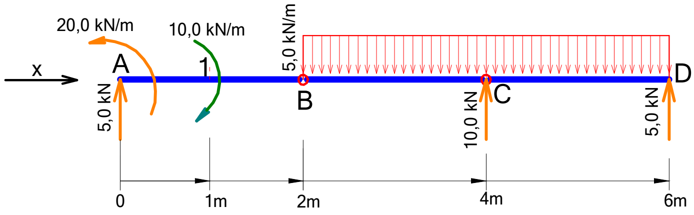
$$M(x) = -10 \cdot x + 60$$

per $x = 6$ $\quad M(6) = M_B = -10 \cdot 60 + 60 = 0$

momento Flettente



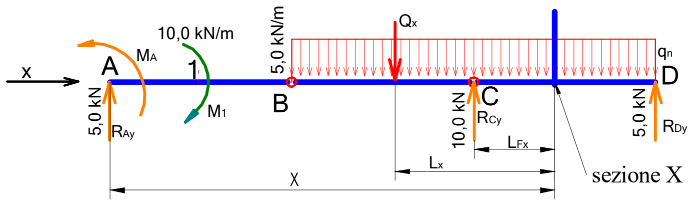
Es. 02
Si chiede calcolare le azioni interne: sforzo normale , taglio, momento flettente e disegnare i relativi diagrammi delle azioni interne.



~ ° ~

Premessa

Nei vari passi dell'esercizio si farà riferimento ad una generica sezione X, con ascissa x, interna all'intervallo considerato come evidenziato dalla figura che segue



Per il taglio si userà la relazione $T(x)=\sum_0^x F_y+\sum_0^x Q_x$

Per il momento si userà la relazione $M(x)=\sum_0^x m+\sum_0^x F_y \cdot L_{Fx}+\sum_0^x Q_x \cdot L_x$

Sforzo Normale N

Sulla trave non agisce nessun carico orizzontale per su di essa lo sforzo normale è nullo

Taglio

In x =0 è presente la reazione $R_{Ay}=5[kN]$ il taglio sarà uguale alla reazione e sarà positivo (la reazione è diretta verso l'alto)

$$x=0 \qquad T(0)=T_A=5[kN]$$

$0 \leq x \leq 2$

Nell'intervallo considerato (0- x) è presente la sola reazione R_{ay}

$$T(x) = \sum F_y = R_{Ay} = 5 \qquad T(x) = 5$$

in $x = 2$ $\qquad T(2) = T_B = 5[kN]$

$2 \leq x \leq 4$

tra la sezione B e la sezione X è applicato un carico continuo $q_n = 5\left[\frac{kN}{m}\right]$ per una lunghezza $L_x = x - 2$ il carico concentrato equivalente è $Q_x = q_n \cdot L_x = 5 \cdot (x-2)$
il taglio vale :

$$T(x) = R_{Ay} - Q_x = 5 - 5(x-2) = 5 + 10 - 5x \qquad T(x) = 15 - 5x$$

in $x = 4$ si ha $T(4) = T_C = 15 - 5 \cdot 4 = -5[kN]$

il taglio si annulla nella sezione $0 = 15 - 5x \qquad x = \frac{15}{5} = 3$

$4 \leq x \leq 6$

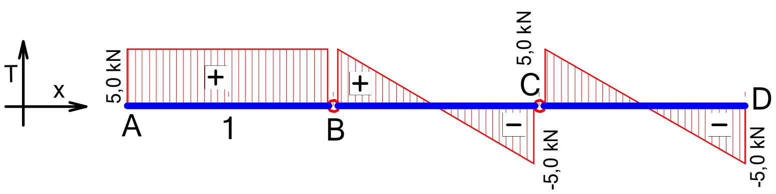
In questo intervallo è presente anche la reazione R_{Cy}, l'espressione del carico continuo non cambia per cui:

$$T(x) = R_{Ay} - Q_y + R_{Cy} = 5 - 5(x-2) + 10 = 5 - 5 \cdot x + 10 + 10 \qquad T(x) = 25 - 5 \cdot x$$

in $x = 4$ si ha $T(4) = T_{CD} = 25 - 5 \cdot 4 = 5[kN]$

in $x = 6$ si ha $T(6) = T_{DS} = 25 - 5 \cdot 6 = -5[kN]$ che corrisponde alla reazione R_{Dy}

è facile ricavare che il taglio si annulla nella sezione di ascissa x = 5



Momento

In x =0 è presente il momento di reazione $M_A = -20[kNm]$ negativo (per le convenzioni adottate)

$$x=0 \qquad M_A=-20[kNm]$$

$0 \le x \le 1$

In questo intervallo sono presenti il momento M_A e la reazione R_{Ay}

$$M(x)=M_A+R_{Ay}\cdot x \qquad M(x)=-20+5\cdot x$$

in $x=1$ si ha $M_{1S}=-20+5\cdot 1=-15[kNm]$

$1 \le x \le 2$

Ai carichi già considerati si aggiunge il momento applicato M= 10 [kNm]

$$M(x)=M_A+R_{Ay}\cdot x-M=-20+5\cdot x+10 \qquad M(x)=-10+5\cdot x$$

in $x=1$ si ha $M(1)=M_{1D}=-10+5\cdot 1=-5[kNm]$ (valore diverso da quello trovato in precedenza per la presenza, nella sezione, del momento M)

in $x=2$ si ha $M(2)=M_{BS}=-10+5\cdot 2=0[kNm]$ nella cerniera il momento deve essere nullo

$2 \le x \le 4$

Ai carichi considerati si deve aggiungere il carico continuo q_n.
Il carico concentrato equivalente Q_x è applicato nel baricentro del diagramma di q_n, in questo caso un rettangolo, ed è ad una distanza dalla sezione X pari alla metà di L_x

$$\frac{L_x}{2}=\frac{x-2}{2}$$

l'espessione del momento diventa

$$M(x)=M_A+R_{Ay}\cdot x-M-Q_x\frac{L_x}{2}=-20+5\cdot x+10-5\cdot(x-2)\cdot\frac{(x-2)}{2}$$

$$M(x)=-10+5\cdot x-\frac{5}{2}\cdot(x-2)^2=-10+\frac{5}{2}\cdot x^2+15\cdot x-5\cdot 2 \qquad M(x)=-20+15x-\frac{5}{2}x^2$$

in $x=2$ si ha $M(2)=M_{BD}=-20+15\cdot 2-\frac{5}{2}\cdot 2^2=-20+30-10=0[kNm]$

in $x=4$ si ha $M(4)=M_{CS}=-20+15\cdot 4-\frac{5}{4}\cdot 2^2=-20+60-40=0[kNm]$

il momento massimo si trova in corrispondenza del taglio nullo

in $x=3$ si ha $M(3)=M_{max}=-20+15\cdot 3-\frac{5}{2}3^2=2{,}5[kNm]$

$4 \leq x \leq 6$

Ai vari carichi si aggiunge la reazione R_{Cy}

$$M(x) = M_A + R_{Ay} \cdot x - M - Q_x \cdot \frac{L_x}{2} + R_{Cy}(x-4) = -20 + 5 \cdot x + 10 - 5 \cdot (x-2) \cdot \frac{(x-2)}{2} + 10 \cdot (x-4)$$

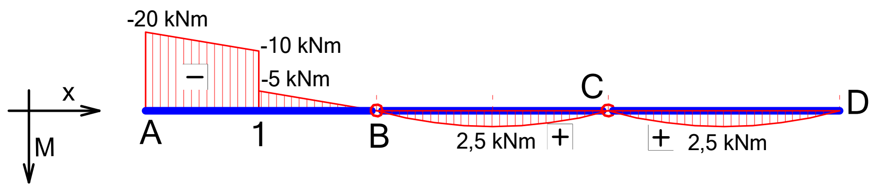
$$M(x) = -10 + 5 \cdot x - \frac{5}{2} \cdot (x-2)^2 + 10(x-4) = -20 + 15x - \frac{5}{2}x^2 + 10 \cdot (x-4)$$

il momento sarà: $M(x) = -60 + 25 \cdot x - 5 \cdot \frac{x^2}{2}$

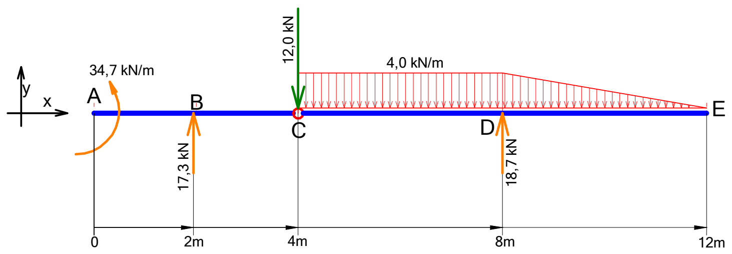
in $x=4$ si ha $M(4) = M_{CD} = -60 + 25 \cdot 4 - \frac{5}{2} \cdot 4^2 = 0[kNm]$

in $x=6$ si ha $M(6) = M_E = -60 + 25 \cdot 6 - \frac{5}{2} \cdot 6^2 = 0[kNm]$

il momento massimo vale $M(5) = M_{Bs} = -60 + 25 \cdot 5 - \frac{5}{2} \cdot 5^2 = 2{,}5[kNm]$



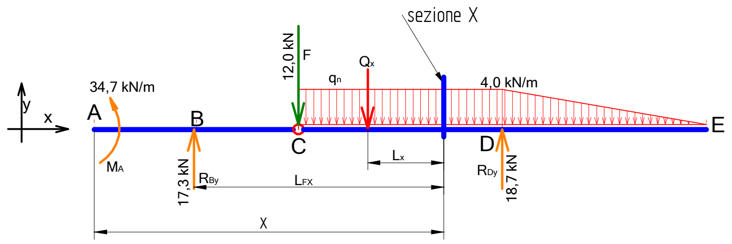
Es. 03
Si chiede calcolare le azioni interne: sforzo normale , taglio, momento flettente e disegnare i relativi diagrammi delle azioni interne.



~ ° ~

Premessa

Nei vari passaggi dell'esercizio si farà riferimento ad una generica sezione X, con ascissa x, interna all'intervallo considerato come evidenziato dalla figura che segue



Per il taglio si userà la relazione $T(x)=\sum_{0}^{x} F_y+\sum_{0}^{x} Q_x$

quella ustata per il momento è $M(x)=\sum_{0}^{x} m+\sum_{0}^{x} F_y \cdot L_{Fx}+\sum_{0}^{x} Q_x \cdot L_x$

Sforzo Normale N

Sulla trave non agisce nessun carico orizzontale per su di essa lo sforzo normale è nullo

Taglio

$0 \leq x \leq 2$

non è presente nessuna forza per cui $T(x)=0$

in $x=1$ si ha $T(0)=T_A=0[kN]$
in $x=2$ si ha $T(2)=T_{BS}=0[kN]$

$2 \le x \le 4$

a sinistra della sezione X è presente la sola reazione R_{By} = 17,3 [kN]

si ha $T(x) = R_{By} = 17{,}3$

in $x = 2$ si ha $T(2) = T_{BD} = 17{,}3[kN]$
(il valore trovato risulta diverso da quello ricavato in precedenza in quanto nella sezione è applicata una forza)

in $x = 4$ si ha $T(4) = T_C = 17{,}3[kN]$

$4 \le x \le 8$

Alle forze già considerate si aggiunge la forza concentrata F, applicata sulla cerniera C, ed il carico continuo q_n, che agisce per un tratto lungo $L_x = x - 4$
Per il calcolo, quest'ultimo lo si sostituisce con un carico concentrato Q_x

$$Q_x = q_n \cdot L_x = 4(x-4)$$

si calcola il taglio nella sezione x

$$T(x) = R_{By} - F - Q_x = 17{,}3 - 12 - 4(x-4) = 17{,}3 - 12 - 4x + 16 \qquad T_x = 21{,}3 - 4x$$

in $x = 4$ si ha $T(4) = T_C = 21{,}3 - 4 \cdot 4 = 5{,}3[kN]$

in $x = 8$ si ha $T(8) = T_{DS} = 21{,}3 - 4 \cdot 8 = -10{,}7[kN]$

il taglio assume valore 0 nella sezione $0 = 21{,}3 - 4x \qquad x = \frac{21{,}3}{4} = 5{,}33[m]$

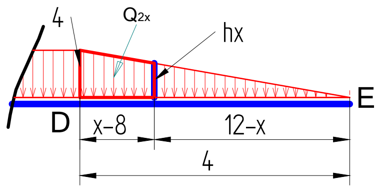
$8 \le x \le 12$

Si devono aggiungere la reazione R_{Dy}.
Il carico continuo non è più costante ma è variabile, lo si sostiruisce con due carichi conce concentrati, Q_1 e Q_{2x}

Q_1 è il carico costante agente tra le sezioni C e D l+erp una lunhezza (8-4), e vale

$$Q_1 = q_n \cdot (8-4) = 4 \cdot 4 = 16[kN]$$

è applicato nella sezione mediana tra C e D con ascissa x =6



Q_{2x} è il carico variabile, linearmente, tra D ed E, poniamo x la sua posizione ed h_x

il carico Q_{2x} assume la forma di un trapezio di altezza (x-8), base maggiore 4 e base minore h_x

Mediante la similitudine dei triangoli si ricava h_x

$h_x : 4 = (12 - x) : 4 \qquad h_x = \frac{(12 - x) \cdot 4}{4} = 12 - x$

Q_{2x} è l'area del trapezio $\quad Q_{2x} = \frac{(B_{mag} + B_{min})}{2} \cdot h$

$Q_{2x} = \frac{(12 - x) + 4}{2} \cdot (x - 8) = \frac{16 \cdot x - 128 - x^2 + 8 \cdot x}{2} \qquad Q_{2x} = 12 \cdot x - 64 - \frac{x^2}{2}$

Di ricava adesso l'espressione di T(x)

$T(x) = R_{By} - F - Q_1 + R_{Dy} - Q_{2x} \qquad T(x) = 17{,}3 - 12 - 4x + 16 + 18{,}7 - (12 \cdot x - 64 - \frac{x^2}{2})$

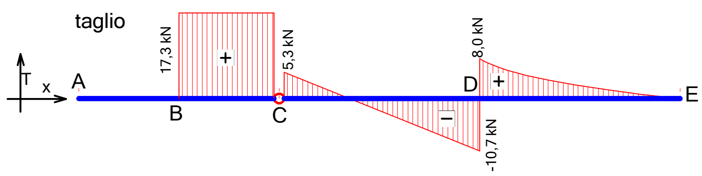
$T(x) = 17{,}3 - 12 - 4x + 16 + 18{,}7 - 12 \cdot x + 64 + \frac{x^2}{2} = 72 - 12 \cdot x + \frac{x^2}{2}$

$T(x) = 72 - 12 \cdot x + \frac{x^2}{2}$

in $\quad x = 8 \qquad$ si ha $\qquad T(8) = T_D = 72 - 12 \cdot 8 + \frac{8^2}{2} = 8$

in $\quad x = 12 \qquad$ si ha $\qquad T(12) = T_E = 72 - 12 \cdot 12 + \frac{12^2}{2} = 0$

Diagramma taglio



Momento

In x =0 è presente il momento di reazione $\quad M_A = -34{,}6\,[kNm] \quad$ negativo (per le convenzioni adottate)

$\underline{0 \leq x \leq 2}$

tra le due sezioni non è presente alcuna forza né momento per cui $\quad M(x) = -34{,}6$

$\underline{2 \leq x \leq 4}$

Si aggiunge il la reazione R_{By}

$M(x) = M_A + R_{By} \cdot x = -34{,}6 + 17{,}3 \cdot (x - 2) = -34{,}6 + 17{,}3 \cdot x - 17{,}3 \cdot 2$

l'espressione è: $\quad M(x) = -69{,}2 + 17{,}3 \cdot x$

in $x=2$ si ha $M(2)=M_B=-69{,}2+17{,}3\cdot 2=-34{,}6\,[kNm]$

in $x=4$ si ha $M(4)=M_C=-69{,}2+17{,}3\cdot 4=0\,[kNm]$

$4\le x\le 8$

Ai carichi precedenti si aggiunge la forza F ed il carico continuo q_n
Ancora una volta si sostituisce q_n con un carico concentrato Q_x, che agisce per un tratto L_x ,applicato nel baricentro della figura ad una distanza $\frac{L_x}{2}$ dalla sezione x.
Si ha:

$$M(x)=M_A+R_{By}L_{Fx1}-F\cdot L_{Fx2}-Q_x\cdot\frac{L_x}{2} \qquad M(x)=M_a+R_{By}\cdot(x-2)-F\cdot(x-4)-q_n\cdot(x-4)\cdot\frac{(x-4)}{2}$$

$$M(x)=-34{,}6+17{,}3\cdot(x-2)-12\cdot(x-4)-\frac{4}{2}\cdot(x-4)^2$$

$$M(x)=-34{,}6+17{,}3\cdot x-17{,}3\cdot 2-12\cdot x+12\cdot 4-2\cdot(x^2-8\cdot x+16)$$

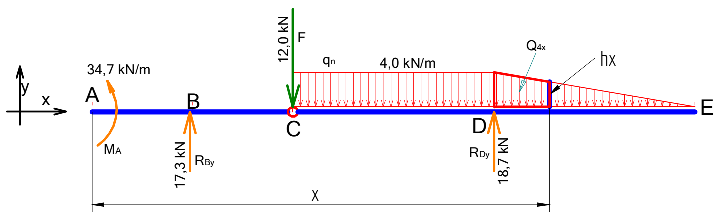
$$M(x)=-21{,}2+5{,}3\cdot x-2\cdot x^2+16\cdot x-32 \qquad M(x)=-53.2+21.3x-2x^2$$

in $x=4$ si ha $M(4)=M_C=-53.2+21.3\cdot 4-2\cdot 4^2=0$
in $x=8$ si ha $M(8)=M_D=-53.2+21.3\cdot 8-2\cdot 8^2=-10{,}8\,[kNm]$

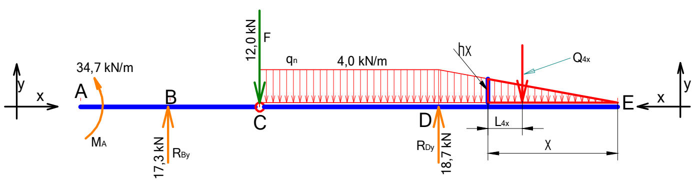
il momento massimo, agente nella sezione con x = 5,33 e vale
$$M_{max1}=-53.2+21.3\cdot 5{,}33-2\cdot 5{,}33^2=3{,}51\,[kNm]$$

$8\le x\le 12$

per il calcolo di questo intervallo è necessario individuare la posizione del carico triangolare che, con riferimento alla sezione x assume una figura trapezoidale per cui è necessario ricavare il baricentro di quest’ultimo.



Per semplificare i calcoli si decide di calcolare l’spressione del M(x) cambiando il sistema di riferimento delle ascisse: si sposta l’origine nella sezione D e si cambia il verso che adesso va da D ad E.



in questo nuovo sistema l'intervallo sarà il carico da analizzare non sarà più un rettangolo, ma un triangolo.

$0 \leq x' \leq 4$

la figura è un triangolo di altezza h_x e di base x.

Il carico concentrato sarà $Q_{3x} = \frac{h_x \cdot x}{2}$ e sarà posizionato ad una distanza $L_x = \frac{x}{3}$

si ricava inoltre che $h_x = x$

il momento è $M(x') = Q_{3x} \cdot \frac{x}{3} = \frac{h_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} x = \frac{x^3}{6}$

in $x' = 4$ si ha $M(x') = \frac{4^3}{6} = 10{,}67\,[kNm]$ il valore trovato deve essere considerato negativo per le convenzioni adottate

$M_D = -10{,}67\,[kNm]$

in $x' = 0$ $M(x') = M_E = \frac{0^3}{6} = 0\,[kNm]$