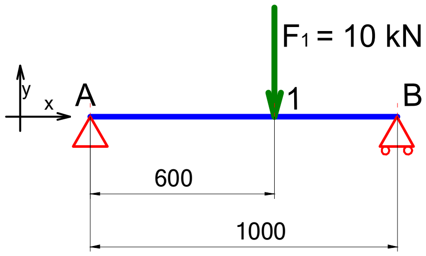
Es. 01

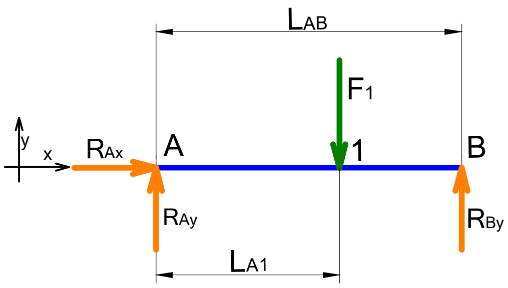
Si desidera calcolare le reazioni vincolari della trave disegnata in figura, le lunghezze sono in mm



~ ° ~

i g.d.l. sono 3·1 = 3,
i g.d.v sono 2+1 = 3 , 2 per la cerniera in A ed 1 per il carrello in B,
infine si noti come alla trave sono limitati tutti i movimenti per cui si può affermare che la struttura è isostatica.

Come primo passaggio sostituiamo ai vincoli le relative reazioni, due per la cerniera ed una per il carrello costruendo quello che chiamiamo *corpo libero associato*.



Il corpo libero è in equilibrio, valgono quindi le equazioni cardinali della statica che, in forma vettoriale, sono:

$$\sum \underline{F} = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum \underline{M} = 0$$

Passando dalla forma vettoriale alla forma scalare (considerando i componenti dei vettori sugli assi x,y,z) le due equazioni vettoriali, diventano 6 nello spazio, e 3 nel piano, nel nostro xy si ha:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

Risolvendo la prima equazione si ottiene: $\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = 0$

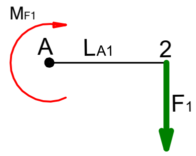
Per le altre due reazioni consideriamo prima la relazione $\sum M_z = 0$,

Per il calcolo dei momenti è necessario individuare un punto da utilizzare come polo, per convenienza è utile scegliere un punto appartenente ad una retta d'azione delle reazioni, scegliamo il punto A.

Il punto A appartiene alle rette d'azione di R_{Ax} ed R_{Ay} per cui queste due forze hanno momento nullo.

Per calcolare i momenti di F_1 ed R_{by} consideriamo le figura che seguono:

la forza F_1 si trova alla distanza L_{A1} da A per cui essa si ha un momento $M_{F1} = F_1 \cdot L_{A1}$



con una *rotazione oraria* rispetto ad A

la reazione R_{By} si trova alla distanza L_{AB} da A per cui essa ha un momento $M_{RBy} = R_{By} \cdot L_{AB}$

con una *rotazione antioraria* rispetto ad A

I due momenti avranno la stessa retta d'azione, passante per il punto A e perpendicolare al piano xy, ma verso opposto per cui uno è positivo e l'altro è negativo

Si ha: $\sum M_z = 0 \rightarrow M_{F1} - M_{RBy} = 0 \rightarrow F_1 \cdot L_{A1} - R_{By} \cdot L_{AB} = 0$

da cui $R_{By} = F_1 \cdot \frac{L_{A1}}{L_{AB}}$

Per il calcolo di R_{Ay} applichiamo la terza equazione

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} - F_1 + R_{By} = 0 \rightarrow R_{Ay} - F_1 + F_1 \frac{L_{A1}}{L_{AB}} = 0 \rightarrow R_{Ay} = F_1 - F_1 \frac{L_{A1}}{L_{AB}}$$

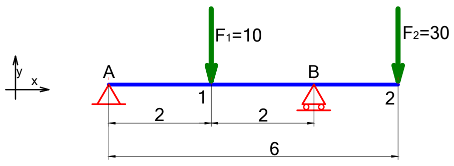
$$R_{Ay} = F_1 \cdot \left(1 - \frac{L_{A1}}{L_{AB}}\right) \rightarrow R_{Ay} = F_1 \cdot \frac{L_{1B}}{L_{AB}}$$

Sostituendo i valori forniti dalla traccia si ha:

$$R_{Ay} = F_1 \cdot \frac{L_{1B}}{L_{AB}} = 10 \cdot \frac{400}{1000} = 4 \ [kN]$$

$$R_{By} = F_1 \cdot \frac{L_{A1}}{L_{AB}} = 10 \cdot \frac{600}{1000} = 6 \ [kN]$$

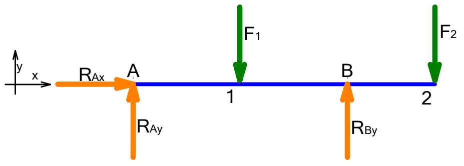
Es. 02
Si desidera calcolare le reazioni vincolari della trave disegnata in figura, le lunghezze sono in metri



~ ° ~

i g.d.l. sono 3*1 = 3,
i g.d.v sono 2+1 = 3, 2 per la cerniera in A ed 1 per il carrello in B,
infine si noti come alla trave sono limitati tutti i movimenti per cui si può affermare che la struttura è isostatica.

Si disegna il corpo libero associato: si sostituiscono ai vincoli le relative reazioni vincolari



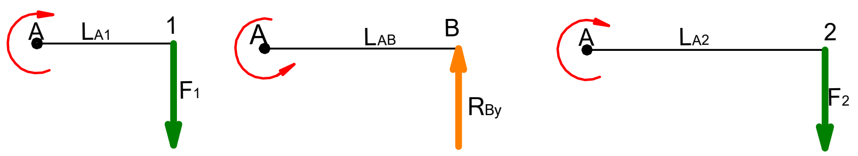
Si applicano le equazioni cardinali della statica nel piano xy si ha:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

Risolvendo la prima equazione si ottiene: $\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = 0$

Per le altre due reazioni si utilizzerà la relazione $\sum M_z = 0$,

Si considera la sezione **A**, e si valutano le singole forze rispetto ad essa.



Ogni forza si trova ad una certa distanza da **A** e tenderà a ruotare in senso orario (F_1 e F_2) o in senso antiorario (R_{By})

I momenti delle forze rispetto ad A sono:

$$M_{1A} = L_{A1} \cdot F_1 \qquad M_{2A} = L_{AB} \cdot R_{By} \qquad M_{3A} = L_{A2} \cdot F_2$$

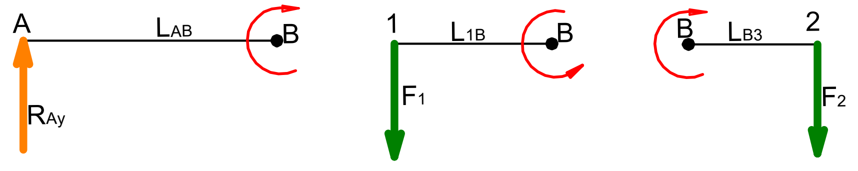
Si sommano i vari momenti, tenendo in conto del tipo di rotazione e ponendo a 0 il totale.

$$M_{1A}-M_{2A}+M_{3A}=0 \qquad L_{A1}\cdot F_1-L_{AB}\cdot R_{By}+L_{A2}\cdot F_2=0$$

Si ricava La reazione vincolare R_{By}

$$R_{By}=\frac{L_{A1}\cdot F_1+L_{A2}\cdot F_2}{L_{Ab}}=\frac{2\cdot 10+6\cdot 20}{4}= \; 35 \;\; [kN]$$

Si effettua la stessa operazione prendendo in considerazione la sezione **B**



Ogni forza si trova ad una certa distanza da **B** e tenderà a ruotare in senso orario (R_{Ay} e F_2) o in senso antiorario (F_1)

Si calcolano i momenti delle forze rispetto a **B**

$$M_{1B}=L_{AB}\cdot R_{Ay} \qquad\qquad M_{2B}=L_{1B}\cdot F_1 \qquad\qquad M_{3B}=L_{B2}\cdot F_2$$

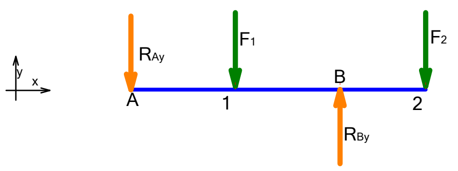
Si sommano i vari momenti, tenendo in conto del tipo di rotazione e ponendo 0 il totale.

$$M_{1B}-M_{2B}+M_{3B}=0 \qquad L_{AB}\cdot R_{Ay}-L_1\cdot F_1+L_{B2}\cdot F_2=0$$

Si ricava La reazione vincolare R_{Ay}

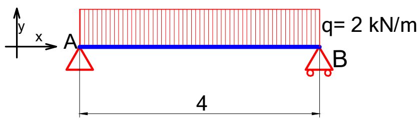
$$R_{Ay}=\frac{L_{1B}\cdot F_1-L_{B2}\cdot F_2}{L_{AB}}=\frac{2\cdot 10-2\cdot 30}{40}= \; -25 \;\; [kN]$$

Il segno – significa che il verso effettivo della reazione R_{Ay} è opposto a quello dato, per cui è necessario invertire i suo verso, come riportato nella figura che segue.



Es. 03

Si desidera calcolare le razioni vincolai di una trave sottoposta ad un carico continuo q = 2 kN/m e lunga 4 m

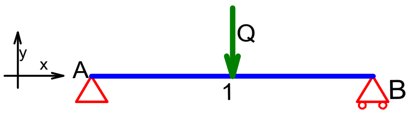


~ ° ~

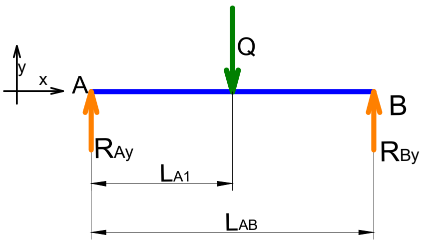
Per poter applicare le equazioni cardinali della statica è necessario sostituire al carico continuo un carico concentrato equivalente **Q**

La forza **Q** avrà modulo $Q = q \cdot L_{AB} = 2 \cdot 4 = 8 \ [kN]$

Essa sarà applicate nel baricentro della figura che rappresenta il carico continuo, nel caso in esame è un rettangolo, il baricentro si trova all'incrocio delle mediane ovvero a metà trave.



Si disegna il corpo libero associato



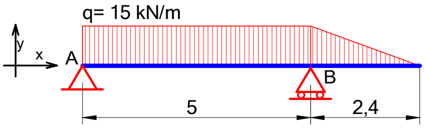
Il calcolo delle reazioni è simile all'esercizio 01, ma è facile vedere che essendo **Q** applicata nella mezzeria della trave le due reazioni R_{Ay} e R_{By} sono uguali.

Si ha

$$R_{Ax} = 0 \qquad R_{Ay} = R_{By} = \frac{Q}{2} = \frac{8}{2} = 4 \ [kN]$$

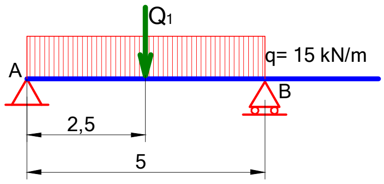
Es.04

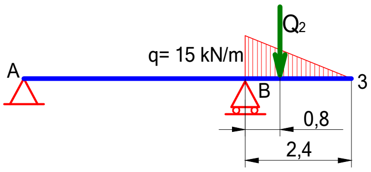
Si chiede di calcolare le reazioni vincolari che agiscono sulla trave disegnata su cui agisce un carico trapezoidale, (le misure delle lunghezze sono in metri)



~ ° ~

Per per calcolare le reazioni vincolari è necessario sostituire al carico continuo un carico continuo equivalente, in questi casi è utile dividere i carico in due tratti, il primo rettangolare ed il secondo triangolare, come nelle figure che seguono.



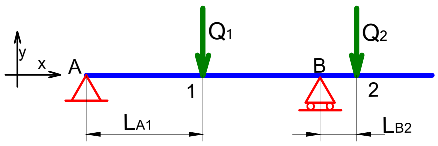


Il carico continuo rettangolare lo sostituiamo con il carico concentrato Q_1 posizionato nel baricentro del rettangolo quindi a 2,5 m dal punto A, il carico continuo triangolare lo sostituiamo con un carico concentrato Q_2 posizionato nel baricentro del triangolo ad una distanza di 0,8 m dal punto B pari ad 1/3 del lato.

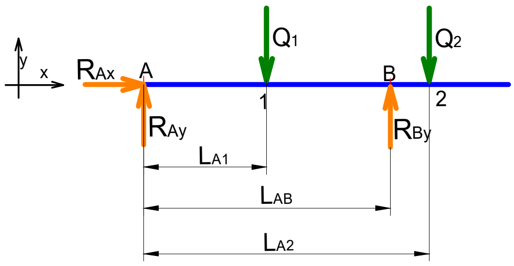
La forze $\mathbf{Q_1}$ e $\mathbf{Q_2}$ avranno modulo

$$Q_1 = q \cdot L_{AB} = 15 \cdot 5 = \ 75 \ [kN] \qquad Q_2 = \frac{q \cdot L_{B3}}{2} = \frac{15 \cdot 2{,}4}{2} = \ 18 \ [kN]$$

La struttura da studiare diventa quella riportata in figura



Si disegna quindi il corpo libero associato



Si calcolano le reazioni vincolari.

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = 0$$

Posto $L_{A2} = L_{Ab} + L_{B2} = 5 + 0{,}8 = 5{,}8 \ [m]$

Applicando l'equazione del momento prendendo come polo il punto A si ha:

$$\sum M_{zA} = 0 \quad \rightarrow \quad Q_1 \cdot L_{A1} - R_{By} \cdot L_{Ab} + Q_2 \cdot L_{A2} = 0 \quad \text{da cui}$$

$$R_{By} = \frac{Q_1 \cdot L_{A1} + Q_2 \cdot L_{A2}}{L_{AB}} = \frac{75 \cdot 2{,}5 + 18 \cdot 5{,}8}{5} = 58{,}38 \ [kN]$$

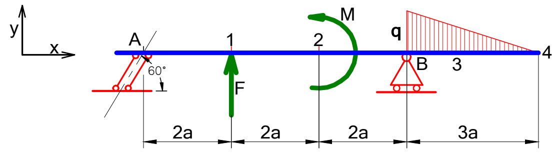
Per calcolare R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} - Q_1 + R_{By} - Q_2 = 0$$

$$R_{Ay} = Q_1 - R_{By} + Q_2 = 75 - 58{,}38 + 18 = 34{,}62 \ [kN]$$

Notiamo che la soluzione ottenuta è possibile ottenerla anche risolvendo le singole strutture con i due carichi rettangolari e triangolari e successivamente sommare le reazioni trovate.

Es. 05



Calcolare le reazioni vincolari della struttura in figura spando che:
a =1 [m], F = 10 kN, M = 24 kNm, q = 16 kN/m

~ ° ~

i g.d.l. sono 3·1 = 3,
i g.d.v sono 2+1 = 3 , 2 il doppio pendolo in A ed 1 per il carrello in B,
infine si noti come alla trave sono limitati tutti i movimenti per cui si può affermare che la struttura è isostatica.

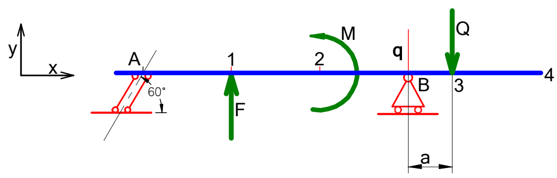
Calcoliamo subito il carico concentrato **Q** e la sua posizione

La modulo vale: $Q=\frac{q\cdot 3\cdot a}{2}=\frac{16\cdot 3\cdot 1}{2}=\ 24\ [kN]$

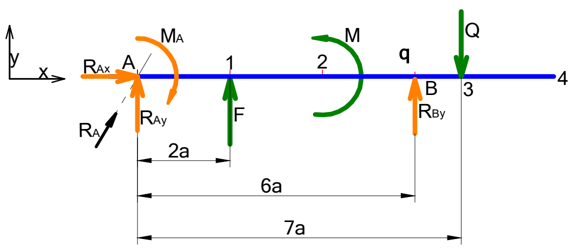
Chiamata 3 la sezione di applicazione di **Q**, la sua distanza dalla sezione B è

$$L_{B3}=\frac{1}{3}L_{B4}=\frac{3\cdot a}{3}=a$$

La figura che segue rappresenta la struttura che si desidera studiare.



Sostituendo ai vincoli le relative reazioni si ottiene il corpo libero associato



Il doppio pendolo reagisce con una forza R_A diretta secondo l’asse del vincolo, inclinata quindi di 45 gradi rispetto alla trave.

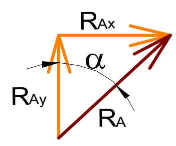
Considerando le componenti di R_A lungo x e y, le reazioni da calcolare saranno in totale 4: R_{Ax}, R_{Ay}, M_A, R_{By},
Le equazioni cardinali della statica per una struttura piana sono tre precisamente

$$\sum F_x=0 \qquad \sum F_y=0 \qquad \sum M_z=0$$

da sole non permettono di risolvere il problema è necessario quindi individuare una relazione accessoria .

Tale relazioni ritrova analizzando la forza reazione R_A.

La retta d'azione della forza R_A è conosciuta, analizzando la figura a lato si nota che le componenti R_{Ax} ed R_{Ay} sono i cateti di un triangolo rettangolo avente un angolo alla base pari ad α che nel caso studiato è 45°



Si ha: $R_{Ax} = R_{Ay} \cdot tg(\alpha) = R_{Ax} \cdot tg(45°)$

Applicando la relazione per l'asse x si ha

$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = 0$ per cui si ha: $R_{Ay} = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = 0$

il doppio pendolo reagisce solo con il momento M_A

Applicando la relazione per l'asse y si ha

$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} + F + R_{By} - Q = 0$ da cui si ha:

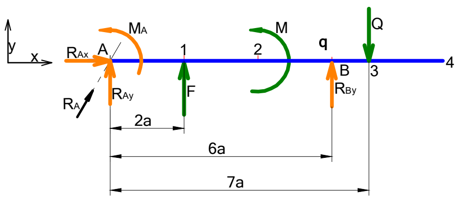
$$R_{By} = Q - R_{Ay} - F = 24 - 0 - 10 = 14 \; [kN]$$

Utilizzano la sezione A come polo si ha

$\sum M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M_A - F \cdot 2a - M - R_{By} \cdot 6a + Q \cdot 7a = 0$ si ha

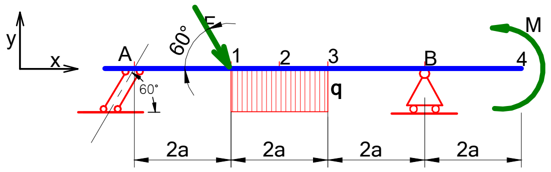
$$M_A = F \cdot 2a + M + R_{By} \cdot 6a - Q \cdot 7a = 10 \cdot 2 + 24 + 14 \cdot 6 - 24 \cdot 7 = -40 \; [kNm]$$

Il segno – significa che il momento M_A ha verso opposto rispetto a quello previsto per cui si ridisegna il nuovo corpo libero con i versi esatti



N.B.
Se la forza F non fosse stata perpendicolare all'asse x ma inclinata di un angolo φ, la reazione vincolare R_{Ax} non sarebbe stata nulla e da questo anche R_{Ay} sarebbe stata diversa da 0

Es. 06



Calcolare le reazioni vincolari della struttura in figura spando che:
a =1 [m], F = 60 kN, M = 50 kNm, q = 10 kN/m

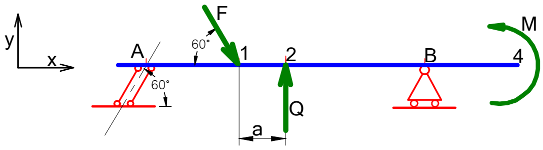
~ ° ~

i g.d.l. sono 3·1 = 3,
i g.d.v sono 2+1 = 3 , 2 il doppio pendolo in A ed 1 per il carrello in B,
infine si noti come alla trave sono limitati tutti i movimenti per cui si può affermare che la struttura è isostatica.

Si calcola concentrato **Q** equivalente al carico continuo $Q = q \cdot 2 \cdot a = 10 \cdot 2 \cdot 1 = \ 20 \ [kN]$

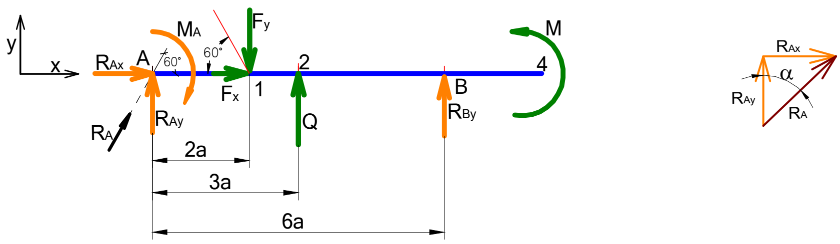
Chiamata 2 la sezione di applicazione di **Q**, la sua distanza dalla sezione 1 è $\dfrac{2\,a}{2} = a$

La figura che segue rappresenta la struttura da analizzare



Il doppio pendolo reagisce con un momento ed una forza $\mathbf{R_A}$ diretta secondo l'asse del vincolo, quindi inclinata di 60° rispetto alla trave. S

Sostituendo ad **F** ed ad $\mathbf{R_A}$ le relative componenti F_x, F_y, R_{ax}, R_{ay}, sugli assi x ed y si disegna il corpo libero associato



Tra le componenti di R_A vale la relazione $R_{Ax} = R_{Ay}\, tg\,(\alpha) = R_{Ay}\, tg\,(60\,°)$

tra quelle di F

$$F_x = F\,\cos(60\,°) = 60\,\cos(60\,°) = \ 30 \ [kN] \qquad F_y = F\ sen(60\,°) = 60\ sen(60\,°) = \ 51{,}96 \ [kN]$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} + F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = -F_x = -30 \ [kN]$$

$$R_{Ay} = \frac{R_{Ax}}{tg(\alpha)} = \frac{-30}{tg(60°)} = -17{,}32 \ [kN]$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} + -F_y + Q + R_{By} = 0$$

$$R_{By} = -R_{Ay} + F_y - Q = -(-17{,}32) + 51{,}96 - 20 = 49{,}28 \ [kN]$$

Utilizzano la sezione A come polo si ha

$$\sum M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M_A + F_y \cdot 2a - Q \cdot 3a - R_{By} \cdot 6a - M = 0 \quad \text{si ha}$$

$$M_A = -F_y \cdot 2a + Q \cdot 3a + R_{By} \cdot 6a + M = -51{,}96 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 49{,}28 \cdot 6 + 50 = 301{,}76 \ [kNm]$$