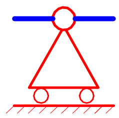
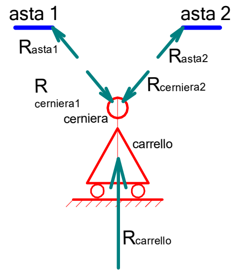
Premessa sui vincoli

Carrello esterno con due aste

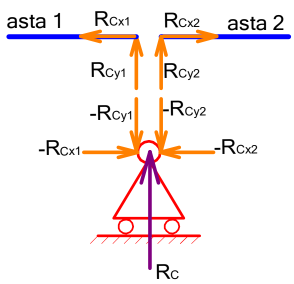


Il grado di vincolo si ricava dalla relazione *g.v.=2n-1* dove n è il numero di aste, se le aste sono 2 si ha $gv=2\cdot 2-1=3$ questo sarà anche il numero di reazioni agenti tra terreno, carrello, aste.



Nel calcolo della struttura si sostituisce il vincolo con le relative reazioni vincolari, che devono essere in numero pari al numero di grado di vincolo.
Nel carrello con due aste sono esse sono 3, una, del carrello, è normale al terreno su cui poggia, le altre due agiscono sulla cerniera, una per ogni asta; si noti che le reazioni sulla cerniera in genere hanno rette d'azioni diverse dalle direzioni delle aste.
Tra ogni asta e la cerniera ci sarà un mutua azione ovvero la cerniera impone sull'asta la forza R_{asta} mentre l'asta impone sulla cerniera una forza $R_{ceniera}$ queste due forze dovranno avere risultante nulla
Essendo il sistema in equilibrio, devono comunque essere verificate le equazioni cardinali della statica, per cui dovrà essere $R_{ceniera} + R_{asta}=0$

Per il calcolo si considerano le componenti sugli assi x e y delle varie forze.

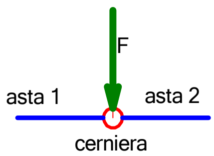


Sull'asta 1 ci saranno le due forze R_{Cx1} ed R_{Cy1} sull'asta 2 le due forze R_{Cx2} ed R_{Cy1}
Le forze orizzontali $R_{cx..}$ dovranno rispettare $\sum F_x=0$ per cui esse avranno lo stesso modulo e versi opposti, come riportato in figura,
Le forze verticali $R_{cy..}$ si scaricheranno sulla cerniera che reagirà con due forze uguali e contrarie $-R_{Cy1}$ e $-R_{Cy2}$ queste forza saranno bilanciate dalla reazione del carrello R_C per cui si ha

$$R_C+(-R_{Cy1})+(-R_{Cy2})=0 \quad \text{da cui} \quad R_C=R_{Cy1}+R_{Cy2}$$

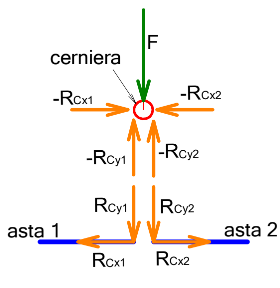
ovvero la reazione (verticale) del carrello è la somma delle due reazioni verticali agenti sulle travi.

Cerniera interna con applicata forza concentrata F



Il grado di vincolo è pari a 2 che si ricava da semplici osservazioni: essendo due aste i gradi di libertà totali sono $3\cdot 2=6$, il collegamento delle travi alla cerniera fa si che ad esse resta la possibilità di ruotare in modo indipendente , ma non quella di traslare tra loro, infatti esse dovranno seguire i movimenti della cerniera lungo x e lungo y,
Per cui al sistema restano 4 gradi di libertà con gradi vincolo 2.

Applicando le equazioni cardinali alla cerniera si ha:

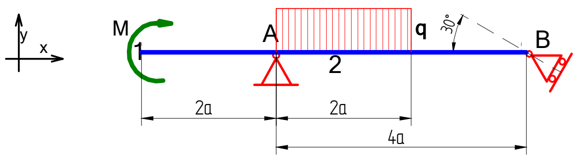


$$F+(-R_{Cy1})+(-R_{Cy2})=0 \quad \text{da cui} \quad F=R_{Cy1}+R_{Cy2}$$

La forza F è dunque pari alla somma delle reazioni che agiscono sulle due travi:

Anche per la cerniera le componenti orizzontali hanno modulo uguale ma vero opposto.

Es. 01
Si chiede il calcolo delle reazioni vincolari.



Si ponga: a = 1 [m], M= 20 [kNm], q = 10 [kN/m]

~ ° ~

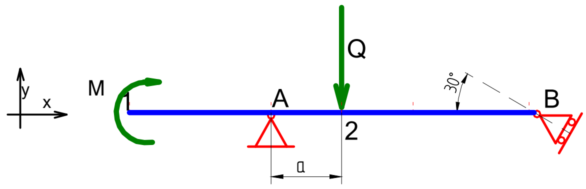
Dai dati forniti si ricava che $2\,a = 2 \cdot 1 = 2\,[m]$ e $4 \cdot a = 4\,[m]$

Si verifica se la struttura è isostatica
i g.d.l. sono 3·1 = 3,
i g.d.v sono 2+1 = 3; 2 per la cerniera in A ed 1 per il carrello in B,
infine si noti come la disposizione dei vincoli limita tutti i movimenti della trave per cui si può affermare che la struttura è isostatica.

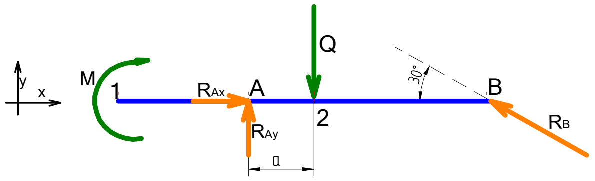
Per poter applicare le equazioni cardinali della statica, e calcolare le razioni, è necessario sostituire al carico continuo un carico concentrato equivalente **Q**

La forza **Q** avrà modulo $Q = q \cdot 2 \cdot a = 10 \cdot 2 = 20\ [kN]$

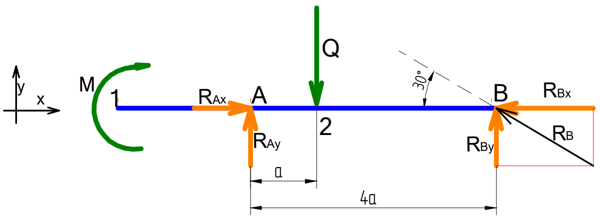
Essa sarà applicate nel baricentro della figura che rappresenta il carico continuo, nel caso in esame è un rettangolo, il baricentro si trova all'incrocio delle mediane ad una distanza 'a' dalla sezione A.



Si disegna adesso il *corpo libero associato* sostituendo ai vincoli le relative reazioni, due per la cerniera ed una per il carrello



Le equazioni cardinale della statica considerano le componenti lungo gli assi x ed y per cui si scompone la reazione R_B nelle due componenti R_{Bx} ed R_{By}.



Le equazioni cardinali sono 3 mentre nel caso studiato le incognite sono 4, è necessaria quindi una relazione aggiuntiva, essa viene ricavata analizzando la reazione del carrello, nella traccia è fornita la sua l'inclinazione , per cui vale la relazione

$$R_{By} = R_{Bx}\, tg\,(30\,°)$$

Considerando la seziona A come polo per i momenti si ha

$$\sum M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M + Q \cdot a - R_{By} \cdot 4\,a = 0 \quad \text{da cui} \quad R_{By} \cdot 4\,a = M + Q \cdot a \quad \text{ed infine}$$

$$R_{By} = \frac{M + Q \cdot a}{4}\,a = \frac{20 + 20 \cdot 1}{4} = \; 10 \;\; [kN]$$

Il punto A appartiene alle rette d'azione di R_{Ax} ed R_{Ay} per cui queste due forze hanno momento nullo.

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} - Q + R_{By} = 0 \quad \text{da cui} \quad R_{Ay} = Q - R_{By} = 20 - 10 = \; 10 \;\; [kN]$$

Si calcolano le altre due reazioni

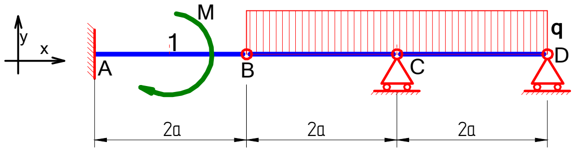
$$R_{Bx} = \frac{R_{By}}{tg\,(30\,°)} = \frac{10}{tg\,(30\,°)} = 17{,}32\;[kN]$$

infine

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} - R_{Bx} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = R_{Bx} \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = 17{,}32\;[kN]$$

Es. 02

Si chiede il calcolo delle reazioni vincolari.



Si ponga: a = 1 [m], M= 10 [kNm], q = 5 [kN/m]

~ ° ~

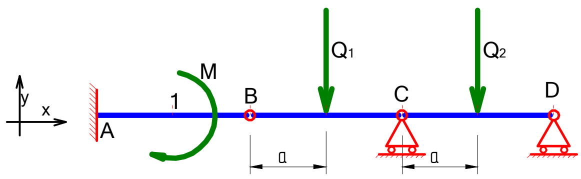
Dai dati forniti si ricava che $2\,a=2\cdot 1=2\,[m]$

Si verifica se la struttura è isostatica
i g.d.l. sono 3·3 = 9,
i g.d.v sono 3 +2+3+1 = 9; 3 per l'incastro, 2 per la cerniera in A, 3 per il carrello in C (con 2 aste). 1 per il carrello in D,
si noti come la disposizione dei vincoli limiti tutti i movimenti della trave per cui si può affermare che la struttura è isostatica.

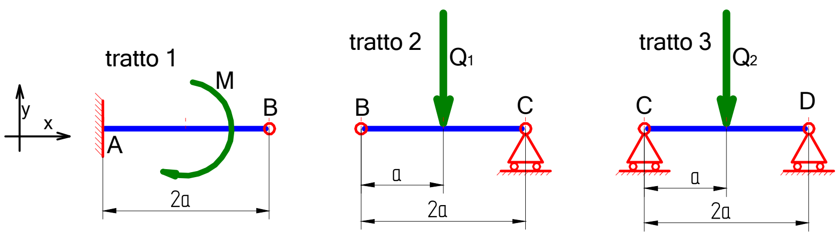
Per poter applicare le equazioni cardinali della statica (e calcolare le razioni), è necessario sostituire al carico continuo un carico concentrato equivalente, in questo caso è utile dividere il carico in due parti, la prima, $\mathbf{Q_1}$ **,** sul tratto BC e la seconda, $\mathbf{Q_2}$, sul tratto CD.

Le forza $\mathbf{Q_1}$ e $\mathbf{Q_2}$ avranno modulo uguale $Q=q\cdot 2\cdot a=5\cdot 2=\ 10\ [kN]$

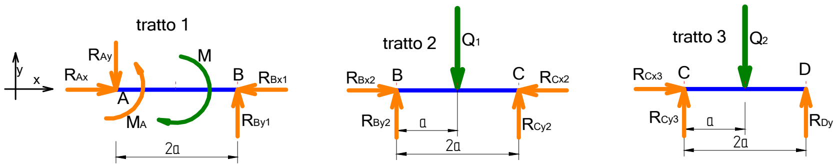
Le due forze saranno applicate nei baricentri delle due figure del carico (sono due rettangoli ed il baricentro si posiziona all'incrocio delle mediane) ad una distanza 'a' dalle sezioni B per $\mathbf{Q_1}$ e C per $\mathbf{Q_2}$.



Dall'analisi iniziale sono stati sono rilevati 9 gradi di vincolo, si dovranno, quindi, individuare 9 reazioni, 7 per i vincoli esterni e 2 per il vincolo interno.
Le equazioni cardinali della statica sono 3, applicate alla struttura, nel suo complesso, non permettono di ottenere una soluzione; si divide quindi la struttura in 3 tratti, quante sono le travi, e li si studia singolarmente.



Si disegnano i corpi liberi associati per tutti i tratti.



Da una semplice analisi si ricava che il tratto 1 non è risolvibile, mentre lo sono i tratti 2 e 3

Tratto 3

Considerando C come polo si ha:

Si ha:

$$\sum M_z = 0 \quad \rightarrow \quad Q_2 \cdot a - R_{Dy} \cdot 2\,a = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Dy} \cdot 2\,a = Q_2 \cdot a$$

$$R_{Dy} = \frac{Q_2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \;[kN]$$

e:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cy3} - Q_2 + R_{Dy} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cy3} = Q_2 - R_{Cy2} = 10 - 5 = 5 \;[kN]$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cx3} = 0$$

Tratto 2

Considerando B come polo si ha:

Si ha:

$$\sum M_z = 0 \quad \rightarrow \quad Q_1 \cdot a - R_{Cy2} \cdot 2\,a = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cy2} \cdot 2\,a = Q_1 \cdot a$$

$$R_{Cy2} = \frac{Q_1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \;[kN]$$

e:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By2} - Q_1 + R_{Cy2} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By2} = Q_1 - R_{Cy2} = 10 - 5 = 5 \;[kN]$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx2} - R_{Cx3} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx2} = R_{Cx3} = 0$$

Per il carrello posto in C vale la relazione $R_{Cy} = R_{Cy2} + R_{Cy3} = 5 + 5 = 10 \;[kN]$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cx2} - R_{Cx3} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cx2} = R_{Cx3} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx2} = 0$$

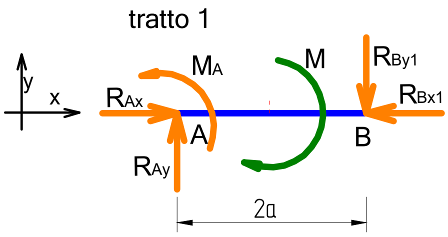
Anche nella cerniera in B devono essere soddisfatte le equazioni cardinali per cui si ha:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By1} + R_{By2} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By1} = -R_{By2}$$

e $\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx1} - R_{Bx2} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx1} = R_{Bx2} = 0$

Dai risultati trova si ricava che è necessario cambiare il verso di R_{By1}

Si ridisegna il corpo libero del tratto 1 dove è stato cambiato il verso di R_{By1} ma anche quello di di R_{Ay}



Risolvendo si ha:

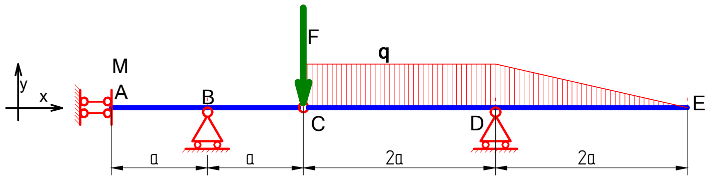
$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} - R_{By1} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = R_{By1} = 5 \ [kN]$$

Considerando il punto A come polo:

$$\sum M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M_A - M - R_{By1} \cdot 2\,a = 0 \quad \rightarrow \quad M_a = M + R_{By1} \cdot 2\,a = 10 + 5 \cdot 2 = 20 \ [kNm]$$

Infine si noti come tutte le reazioni dirette lungo x sono 0.

Es. 03
Si chiede il calcolo delle reazioni vincolari.



Si ponga: a = 2 [m], F= 12 [kN], q = 4 [kN/m]

~ ° ~

Dai dati forniti si ricava che $2\,a=2\cdot 2=4\,[m]$

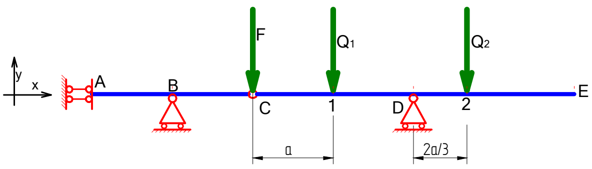
Si verifica se la struttura è isostatica
i g.d.l. sono 3·2 = 6,
i g.d.v sono 2+1 +2 + 1 = 6; 2 per il doppio pendolo in A, 1 per il carrello in B, 2 per la cerniera in C, 1 per il carrello in D
infine si noti come la disposizione dei vincoli limita tutti i movimenti della trave per cui si può affermare che la struttura è isostatica.

Per poter applicare le equazioni cardinali della statica (e calcolare le razioni), è necessario sostituire al carico continuo un carico concentrato equivalente, in questo caso è utile dividere il carico in due parti, la prima a sezione rettangolare sul tratto CD con carico concentrato equivalente $\mathbf{Q_1}$ **,** e la seconda triangolare sul tratto DE e carico concentrato equivalente $\mathbf{Q_2}$

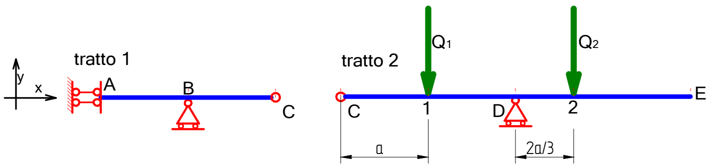
Le forza $\mathbf{Q_1}$ ha modulo $Q_1=q\cdot 2\cdot a=4\cdot 4=\ 16\ [kN]$

$\mathbf{Q_2}$ modulo $Q_2=\dfrac{q\cdot 2\cdot a}{2}=\dfrac{4\cdot 4}{2}=\ 8\ [kN]$

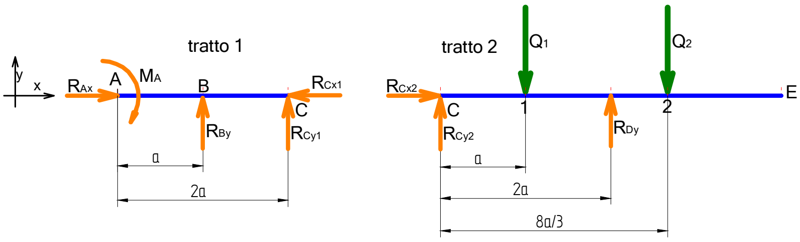
Le due forze saranno applicate nei baricentri delle due figure del carico, un rettangolo ed un triangolo.
Il carico $\mathbf{Q_1}$ si posiziona ad una distanza 'a' dalla sezione C, il carico $\mathbf{Q_2}$ ad una distanza '2a/3' dalla sezione D



Per risolvere la struttura la si divide 2 tratti, quante sono le travi, e li si studia singolarmente, con particolare attenzione sulla sezione C dove è posizionata una cerniera su cui agisce la forza F.



In figura sono rappresentati i relativi corpi liberi.



Per il calcolo si analizza prima il tratto <u>2</u> e poi quello <u>1</u>

Tratto 2

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cx2} = 0$$

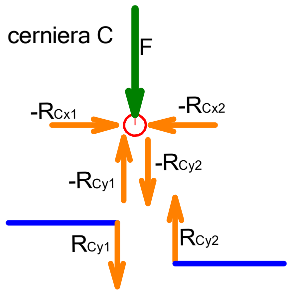
Prendendo come polo la sezione C si ha

$$\sum M_z = 0 \quad \rightarrow \quad Q_1 \cdot a - R_{Dy} \cdot 2 \cdot a + Q_2 \cdot \frac{8 \cdot a}{3} = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot \frac{8 \cdot a}{3}}{2 \cdot a} = \frac{Q_1 \cdot 3 \cdot a + Q_2 \cdot 8 \cdot a}{6 \cdot a} = \frac{16 \cdot 3 \cdot 2 + 8 \cdot 8 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \ 18{,}67 \ [kN]$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cy2} - Q_1 + R_{Dy} - Q_2 = 0 \qquad R_{Cy2} = Q_1 - R_{Dy} + Q_2 = 16 - 18{,}67 + 8 = \ 5{,}33 \ [kN]$$

Cerniera C



Le forze che agiscono sulla cerniera sono opposte a quella che agiscono sui tratti collegati, come riportato nella figura a lato

La cerniera C è in equilibrio quindi valgono le relazioni

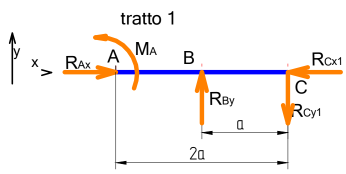
$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cx1} - R_{Cx2} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Cx1} = R_{Cx2} = 0 \qquad \text{e}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad F + (-R_{Cy2}) + (-R_{Cy1}) = 0 \quad \rightarrow \quad F = R_{Cy1} + R_{Cy2}$$

Notato che F ed R_{Cy2} hanno verso opposto si ha $R_{Cy1} = F - R_{Cy2} = 12 - (-5{,}33) = \ 17{,}33 \ [kN]$

Tratto 1

Dal calcolo, e dalla figura, si ricava un verso di R_{Cy1} opposto a quello ipotizzato per cui è necessario effettuare degli opportuni cambiamenti di verso sul corpo libero



$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax1} - R_{Cx1} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax1} = R_{Cx1} = 0$$

Considerando la seziona B come polo

$$\sum M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M_A - R_{Cy1} \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 17{,}33 \cdot 2 = \ 34{,}66 \ [kN]$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By} - R_{Cy1} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By} = R_{Cy1} = \ 17{,}33 \ [kN]$$